Institutionen för Matematik
KTH

Lösningsförslag till
Extra tentamen i Analytiska metoder och linjär algebra 1
för M, BD, P och T (kurskod 5B1132) samt IT (kurskod 5B1140)
Den 29 januari 2005

1. Låt B vara matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Bestäm matrisen $B^T B$ och avgör om $B^T B$ är inverterbar.

Lösning: $B^T B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ och eftersom $\det(B^T B) = 0$ saknas invers.

2. Finn samtliga tre nollställen till polynomet $p(z) = z^3 - z^2 + 2$.

Lösning: Vi ser att $z = -1$ är en lösning. Faktorsatsen ger då att polynomet har en faktor $z + 1$. Divideras denna bort fås att $p(z) = (z + 1)(z^2 - 2z + 2)$ och resterande nollställen till $p(z)$ är nollställena til den andra faktorn, dvs $z = 1 \pm i$. Nollställena till polynomet är alltså $z = -1$, $z = 1 + i$, $z = 1 - i$.

3. Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $y + y^3 = x^2 + 2e^x$ i punkten $(x, y) = (0, 1)$. Tips: derivera implicit.

Lösning: Implicit derivering ger $y' + 3y^2 y' = 2x + 2e^x$. Om $x = 0$ och $y = 1$ ger detta att $4y'(0) = 2$, dvs $y'(0) = 1/2$. Tangenten till kurvan i punkten $(0, 1)$ blir därför $y = x/2 + 1$.

4. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \dfrac{2\cos 2x - 2\cos x + 3x^2}{\sin^4 x}$.

Lösning: Taylorutveckling ger

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x - 2\cos x + 3x^2}{\sin^4 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{15}{12}x^4 + \mathcal{O}(x^6)}{x^4 + \mathcal{O}(x^6)} = \frac{15}{12}.$$

5. Beräkna volymen av den kropp som genereras då området mellan x-axeln och kurvan $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $1 \leq x \leq e$, roteras ett varv runt x-axeln. Avgör sedan om denna volym är större eller mindre än 1.

Lösning: Volymen ges enligt formeln $V = \pi \int y^2\, dx$, dvs

$$V = \pi \int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}\, dx = \pi[(\ln x)^3/3]_1^e = \pi/3$$

som ju är större än 1.

6. Antar funktionen $f(x) = \dfrac{1+x}{1+x^2} - \arctan x$ ett största och ett minsta värde på intervallet $-1 \leq x \leq 1$? Bestäm i så fall dessa.

Lösning: Funktionen är kontinuerlig på hela intervallet som är slutet och begränsat, alltså finns ett största och ett minsta värde. Dessa kan antas i ändpunkterna på intervallet, i punkter där derivata saknas och i punkter där derivatan är noll. Vi deriverar och får

$$f'(x) = \frac{1+x^2-2x(1+x)}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{-2x(1+x)}{(1+x^2)^2}$$

och vi ser att derivatan existerar i hela intervallet och att den är noll när $x = 0$ och när $x = -1$. Största och minsta värde tas alltså i någon av punkterna -1, 0 och 1. Eftersom $f(-1) = \pi/4$, $f(0) = 1$ och $f(1) = 1 - \pi/4$ ser vi att funktionens största värde på intervallet är 1 och funktionens minsta värde är $1 - \pi/4$.

7. Låt A vara matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 \\ x & x & 2 \end{pmatrix}$. Beräkna integralen $\displaystyle\int_3^4 \frac{1}{\det A}\, dx$.

Lösning: Vi räknar ut att $\det A = (1-x)(2-x)$ och får med partialbråksuppdelning

$$\begin{aligned}
\int_3^4 \frac{1}{\det A}\, dx &= \int_3^4 \frac{1}{(1-x)(2-x)}\, dx \\
&= \int_3^4 \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x} \right) dx \\
&= [\ln(x-1) - \ln(x-2)]_3^4 \\
&= \ln 3 - 2\ln 2.
\end{aligned}$$