KTH Matematik

Lösningar tentamen 17 mars 2005 i 5B1132/5B1140, Amelia1

1. En vektor som är ortogonal mot vektorerna $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 3)$ och $\mathbf{v}_2 = (2, -1, 1)$ ges av
$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0 \cdot 1 - 3 \cdot (-1), 3 \cdot 2 - 1 \cdot 1, 1 \cdot (-1) - 0 \cdot 2) = (3, 5, -1).$$
Möjliga **svar** är multipler ($\neq 0$) av $(3, 5, -1)$.

2. Den givna ekvationen $z^2 - 4z + 7 + 4i = 0$ är (kvadratkomplettering) ekvivalent med $z^2 - 4z + 4 = -7 - 4i + 4$, dvs $(z - 2)^2 = -3 - 4i$.
Med $z - 2 = x + iy$ (x, y reella) blir detta
$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = -3 \\ 2xy & = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 & = -3 \\ y & = -\frac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \frac{4}{x^2} & = -3 \\ y & = -\frac{2}{x} \end{cases}$$
Den första ekvationen blir $(x^2)^2 + 3x^2 - 4 = 0$, med lösningar
$x^2 = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{(\frac{3}{2})^2 + 4} = -\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2} = 1$ eller -4. Eftersom x är reellt gäller $x^2 = 1$, så $x = \pm 1$ och enligt den andra ekvationen $y = \mp 2$. Alltså $z - 2 = \pm(1 - 2i)$ och **svar:** $z = \begin{cases} 3 - 2i \\ 1 + 2i \end{cases}$.

3. $y = y(x) = \frac{1}{1 + 2\ln x}$ ger (kedjeregeln) $y'(x) = \frac{-1}{(1+2\ln x)^2} \cdot \frac{2}{x}$, så $y'(1) = -1 \cdot 2 = -2$. Lutningen för tangenten i punkten $(1, 1)$ är alltså -2 och normalens lutning i samma punkt således $-\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$. Normalens ekvation blir alltså $y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1)$, dvs **svar:** $x - 2y + 1 = 0$.

4. Vi söker MacLaurinutvecklingen för funktionen $f(x) = \sqrt{1 + xe^x}$.
Alternativ 1, **med ordoräkning:**
Med kända utvecklingar får vi $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \mathcal{O}(t^3)$ och
$t = xe^x = x(1 + x + \mathcal{O}(x^2)) = x + x^2 + \mathcal{O}(x^3) = x + \mathcal{O}(x^2) = \mathcal{O}(x)$,
så $f(x) = 1 + \frac{1}{2}(x + x^2 + \mathcal{O}(x^3)) - \frac{1}{8}(x + \mathcal{O}(x^2))^2 + \mathcal{O}((\mathcal{O}(x))^3) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \mathcal{O}(x^3)$. P.g.a. MacLaurinutvecklingens entydighet är detta den sökta utvecklingen, dvs **svaret**.
Alternativ 2, **genom att beräkna derivator:**
Man finner $f(0) = \sqrt{1 + 0} = 1$,
$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+xe^x}} \cdot (0 + 1e^x + xe^x) = \frac{(x+1)e^x}{2\sqrt{1+xe^x}}$ och $f'(0) = \frac{1}{2}$,
$f''(x) = \frac{(1e^x + (x+1)e^x)2\sqrt{1+xe^x} - (x+1)e^x 2f'(x)}{4(1+xe^x)}$ och $f''(0) = \frac{2 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}}{4 \cdot 1} = \frac{3}{4}$.
Så utvecklingen: $f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^3) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \mathcal{O}(x^3)$, **svaret**.

5. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x + 1}\, dx = \left[\begin{array}{c} t = \sin x \\ dt = \cos x\, dx \end{array}, \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline \frac{\pi}{2} & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right] = \int_0^1 \frac{dt}{t^2+1} = [\arctan t]_0^1 = \frac{\pi}{4},$$ **svaret**.

6. Vi har $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ och söker A^{-1}. Med Gausselimination:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -2\cdot r1 \\ -4\cdot r1 \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) -r3 \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & 1 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} -2\cdot r2 \\ \\ +6\cdot r2 \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 6 & -5 \end{array}\right),$$

så **svar:** $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 8 & 6 & -5 \end{pmatrix}$

7. Vi söker den allmänna lösningen till ekvationen $y'' + y' - 6y = (10x - 3)\,e^{2x}$.
1) Finn först y_h, den allmänna lösningen till den **homogena** ekvationen.
Karakteristiska ekvationen $r^2 + r - 6 = 0$ har de enkla rötterna $r_{1,2} = 2, -3$, så $y_h(x) = Ae^{2x} + Be^{-3x}$, A, B godtyckliga konstanter.
2) För att finna en partikulärlösning y_p, inför $z(x)$ enligt $y(x) = z(x)e^{2x}$. Förskjutningsregeln (eller direkt beräkning av y', y'' och insättning) ger $y'' + y' - 6y = (D^2 + D - 6)y = (D^2 + D - 6)(ze^{2x}) = e^{2x}((D+2)^2 + (D+2) - 6)z = e^{2x}(D^2 + 5D)z = (z'' + 5z')e^{2x}$.
Ekvationen blir alltså $z'' + 5z' = 10x - 3$. För att finna en partikulärlösning z_p ansätter vi $z(x) = ax^2 + bx + c$ och sätter in. Det ger $10ax + 2a + 5b = 10x - 3$, så ansatsen ger en lösning om $10a = 10, 2a + 5b = -3$, dvs $a = 1, b = -1, c$ godtycklig. Vi får alltså en partikulärlösning $z_p(x) = x^2 - x$.
Den allmänna lösningen ges av $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$, så
Svar: Lösningen är $y(x) = (x^2 - x + A)e^{2x} + Be^{-3x}$, A, B godtyckliga.

8. $\int_1^3 \frac{x^3+4x+4}{x^3+2x^2}\,dx = \int_1^3 (1 + \frac{-2x^2+4x+4}{x^2(x+2)})\,dx = \int_1^3 (1 + \frac{-3}{x+2} + \frac{x+2}{x^2})\,dx =$
$= \int_1^3 (1 - \frac{3}{x+2} + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2})\,dx = \left[x - 3\ln|x+2| + \ln|x| - \frac{2}{x}\right]_1^3 =$
$= (3 - 3\ln 5 + \ln 3 - \frac{2}{3}) - (1 - 3\ln 3 + \ln 1 - \frac{2}{1}) = \frac{10}{3} - 3\ln 5 + 4\ln 3$, **svaret**.

9. Avståndet från punkten (x, y, z) till planet $2x + y - 2z = 1$ är $\frac{|2x+y-2z-1|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}} = \frac{1}{3}|2x + y - 2z - 1|$ och till planet $4x - 3z = 5$ är det $\frac{|4x-3z-5|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{1}{5}|4x - 3z - 5|$.
Villkoret på t för att $(x, y, z) = (4 + 4t, 3 - t, 2 + 2t)$ skall ha samma avstånd till planen blir $\frac{1}{3}|2(4+4t) + (3-t) - 2(2+2t) - 1| = \frac{1}{5}|4(4+4t) - 3(2+2t) - 5|$, dvs $5(3t+6) = \pm 3(10t+5)$. $5(3t+6) = 3(10t+5)$ ger $t = 1$ (punkten $(8, 2, 4)$), $5(3t + 6) = -3(10t + 5)$ ger $t = -1$ (punkten $(0, 4, 0)$).
Svar: Punkterna $(8, 2, 4)$ **och** $(0, 4, 0)$.

10. Vi studerar konvergens för serien $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sqrt{\cos\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)$.
$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t + \mathcal{O}(t^2)$ och $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4)$ ger att $\sqrt{\cos x} = 1 - \frac{1}{4}x^2 + \mathcal{O}(x^4)$ (då $x \to 0$) och således $1 - \sqrt{\cos\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{4n} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$ (då $n \to \infty$).
Termerna i serien avtar alltså som $\frac{1}{n}$, så (enligt sats 9.8 i boken)
svaret: Serien är divergent.