KTH Matematik

Lösningar till tentamen i Analytiska metoder och linjär algebra 1 för M, BD, P och T (kurskod 5B1132) samt IT (kurskod 5B1140)

den 24 augusti 2005

1. Låt $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Bestäm $\det A$ och avgör om A har någon invers.

——- **Lösning:** ——-

Vi räknar ut $\det A$ genom utveckling längs sista kolonnen och får att $\det A = -5(2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 4 + 0 \cdot 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 1) = 0$. Eftersom $\det A = 0$ så saknar A invers.

Svar: $\det A = 0$ och A saknar invers.

——————-

2. Polynomet $p(z) = z^4 - 2z^3 - 23z^2 - 2z - 24$ uppfyller att $p(i) = 0$. Finn samtliga lösningar till ekvationen $p(z) = 0$.

——- **Lösning:** ——-

Eftersom polynomet har reella koefficienter så gäller att om i är ett nollställe så måste även $-i$ vara det. Faktorsatsen ger sedan att såväl $z - i$ som $z + i$ delar $p(z)$ och eftersom $(z-i)(z+i) = z^2 + 1$ så kan vi alltså dividera $p(z)$ med $z^2 + 1$. Vi utför divisionen och får $p(z) = (z^2 + 1)(z^2 - 2z - 24)$. Övriga nollställen till polynomet fås nu som nollställen till den andra faktorn och dessa är (enligt den vanliga lösningsformeln för andragradsekvationer) $z = 1 \pm \sqrt{1 + 24}$. Lösningarna till ekvationen $p(z) = 0$ är alltså $\pm i, 6, -4$.

Svar: $\pm i, 6, -4$

——————-

3. Låt $f(x) = e^{\tan x} - 3x \cos x - 1$. Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $y = f(x)$ i punkten $(x, y) = (\pi, 3\pi)$.

——— **Lösning:** ———

Vi deriverar och får $f'(x) = e^{\tan x}(1+\tan^2 x) - 3\cos x + 3x\sin x$. Vi ser att $f'(\pi) = 4$. Den sökta tangentens ekvation blir därför $y - 3\pi = 4(x - \pi)$ eller ekvivalent $y = 4x - \pi$.

Svar: $y = 4x - \pi$

————————

4. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x \sin x - x}{1 - e^{x^3}}$.

——— **Lösning:** ———

Vi Taylorutvecklar och får att

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\cos x \sin x - x}{1 - e^{x^3}} &= \lim_{x\to 0} \frac{(1 - x^2/2 + \mathcal{O}(x^4))(x - x^3/6 + \mathcal{O}(x^5)) - x}{1 - (1 + x^3 + \mathcal{O}(x^6))} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-2x^3/3 + \mathcal{O}(x^5)}{-x^3 + \mathcal{O}(x^6)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-2/3 + \mathcal{O}(x^2)}{-1 + \mathcal{O}(x^3)} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Svar: $\dfrac{2}{3}$

————————

5. Beräkna integralen $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2(x-1)} dx$.

——— **Lösning:** ———

Vi partialbråksuppdelar integranden och får att

$$\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}.$$

Sätter vi in detta i integralen får vi att

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{1}{x^2(x-1)}dx &= \int_2^3 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx \\ &= [\ln(x-1) - \ln x + 1/x]_2^3 \\ &= \ln 2 - \ln 3 + 1/3 - \ln 1 + \ln 2 - 1/2 \\ &= \ln\frac{4}{3} - \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Svar: $\ln\frac{4}{3} - \frac{1}{6}$.

———————————————-

6. Antar funktionen $f(x) = \arctan x - x$ ett största och ett minsta värde när x varierar i intervallet $-1 \leq x \leq 1$? Bestäm i så fall dessa.

———- Lösning: ———-

Funktionen är kontinuerlig på hela det slutna och begränsade intervallet så ett största och ett minsta värde existerar. Dessa kan antas i punkter där derivata saknas eller i punkter där derivatan är noll eller i ändpunkter till intervallet. Vi deriverar och får

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 = \frac{-x^2}{1+x^2}.$$

Vi ser att derivatan existerar i alla punkter och $f'(x) = 0$ om och endast om $x = 0$. De punkter där största respektive minsta värde antas kan alltså bara vara $-1, 0, 1$. Vi räknar ut funktionsvärdena i dessa punkter och jämför.

$f(-1) = 1 - \frac{\pi}{4}$

$f(0) = 0$

$f(1) = \frac{\pi}{4} - 1$

Vi ser att att funktionens största värde på intervallet är $1 - \pi/4$ och funktionens minsta värde är $\pi/4 - 1$.

Svar: Största värdet är $1 - \pi/4$ och minsta värdet är $\pi/4 - 1$.

———————————————-

7. Bestäm samtliga lösningar $y(x)$ till differentialekvationen $y'' + 4y = \sin 2x$ som yppfyller att $y(0) = 0$.

———- Lösning: ———-

Först söks allmänna lösningen y_h till den homogena ekvationen. Karaktäristiska ekvationen $r^2 + 4r = 0$ har lösningar $r = \pm 2i$ så

$$y_h = A\cos 2x + B\sin 2x$$

där A, B är godtyckliga konstanter. Vi ansätter en partikulärlösning y_p till den i uppgiften givna ekvationen och eftersom högerledet är en lösning till den homogena ekvationen måste vi ansätta $y_p = x(c\cos 2x + d\sin 2x)$. När vi deriverar detta ser vi att $y_p'' + 4y_p = \sin 2x$ om och endast om vi väljer konstanterna $c = -1/4$ och $d = 0$. Alltså kan vi ta

$$y_p = -\frac{1}{4}x\cos 2x.$$

Allmänna lösningen till diffekvationen $y'' + 4y = \sin 2x$ fås som
$y_h + y_p = A\cos 2x + B\sin 2x - \frac{1}{4}x\cos 2x$ och villkoret $y(0) = 0$ är uppfyllt om och endast om $A = 0$.

Svar alltså: $y(x) = B\sin 2x - \dfrac{1}{4}x\cos 2x$, där B är ett godtyckligt reellt tal.

———————————-

8. Finns det något reellt tredjegradspolynom $p(x)$ vars graf $y = p(x)$ passerar genom punkterna $(0,0), (1,0), (2,1), (3,-1)$? Bestäm polynomet $p(x)$ eller förklara varför det inte kan finnas.

———- Lösning: ———-

Villkoret att grafen ska gå genom origo ger direkt att konstanta termen i polyomet måste vara 0, dvs polynomet måste se ut som $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ för några tal a, b, c. Villkoret att de övriga punkterna ska ligga på grafen betyder att
$p(1) = 0$, $p(2) = 1$, $p(3) = -1$, vilket ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 8a + 4b + 2c = 1 \\ 27a + 9b + 3c = -1 \end{cases}$$

som vi löser med Gausselimination:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & 1 \\ 0 & -18 & -24 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & -11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 6 & -11 \end{pmatrix},$$

varur man får att $c = -11/6$, $b = 5/2$ och $a = 11/6 - 5/2 = -2/3$. Det finns alltså ett polynom med de sökta egenskaperna och detta polynom är

$$p(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{11}{6}x.$$

Svar: $p(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{11}{6}x.$

---

9. Går det att bestämma konstanten a så att serien $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a}{n} - 1 + \cos\frac{1}{n})$ blir konvergent?

——— Lösning: ———

När n går mot oändligheten är $\cos\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2n^2} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^4})$, så den n:te termen i summan är

$$b_n = \frac{a}{n} - 1 + \cos\frac{1}{n} = \frac{a}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^4})$$

Om nu $a \neq 0$ så tar vi som jämförelseserie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ som vi vet är divergent. Om vi kallar den n:te termen i denna serie för c_n så gäller uppenbarligen att

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{c_n} = a \neq 0$$

och enligt jämförelsekriteriet så betyder detta att de båda serierna har samma konvergensegenskaper, dvs vår serie också är divergent.

Om $a = 0$ får man använda jämförelseserien $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ istället och om vi kallar den n:te termen i den serien för d_n får vi att

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{d_n} = \frac{1}{2} \neq 0$$

vilket betyder att vår serie i detta fall har samma konvergensegenskaper som $\sum \frac{1}{n^2}$ som vi vet är konvergent.
Alltså är vår serie konvergent om och endast om $a = 0$.

Svar: Vår serie är konvergent om och endast om $a = 0$.

———————————-

10. Låt D beteckna det ändliga område i planet som helt stängs in av kurvorna $y = x^2$ och $y = x\sqrt{2-x}$. Bestäm volymen av den kropp som genereras när området D roteras ett varv runt x-axeln.

———- **Lösning:** ———-

Skärningspunkter mellan kurvorna fås när $x^2 = x\sqrt{2-x}$, vilket betyder att $x = 0$ ger en skärningspunkt, och den andra fås när $x = \sqrt{2-x}$, dvs är den positiva lösningen till $x^2 = 2 - x$, dvs $x = 1$. Den sökta kroppens volym V fås nu som $V_1 - V_2$, där V_1 är den volym som fås då $y = x\sqrt{2-x}$ roteras och V_2 är den volym som fås då $y = x^2$ roteras (på intervallet $[0, 1]$). Vi har att

$$V_1 = \pi \int_0^1 (x\sqrt{2-x})^2 dx = \pi \int_0^1 (2x^2 - x^3) dx = \pi[2x^3/3 - x^4/4]_0^1 = \frac{5\pi}{12}.$$

Vidare är

$$V_2 = \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi[x^5/5]_0^1 = \frac{\pi}{5}.$$

Vi får att $V = V_1 - V_2 = \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{5} = \frac{13\pi}{60}$.

Svar: $V = \frac{13\pi}{60}$.

———————————-