1. Man får

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + 2\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ och } \det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + 2\boldsymbol{A}^{-1}) = 19.$$

**Svar:** 19.

---

2. För $t = 0$ får vi punkten $(3,1,0)$. Vektorn $\boldsymbol{u} = (1,1,1) - (3,1,0) = (-2,0,1)$ är parallell med planet. Linjens riktingsvektor $\boldsymbol{v} = (1,-2,1)$ är också parallell med planet. Detta medför att vektorn $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} = (2,3,4)$ är planets normalvektor. Planet ges av ekvationen

$$(2,3,4)\cdot(x-1, y-1, z-1) = 0$$

dvs $2x + 3y + 4z = 9$.

**Svar:** $2x + 3y + 4z = 9$.

---

3. Vi har

$$f(x) = \ln(1 + 4x^2) - 4 \arctan 2x \text{ och}$$
$$f'(x) = \frac{8x}{1+4x^2} - \frac{8}{1+4x^2} = \frac{8x-8}{1+4x^2}.$$

Här är $f'(x) > 0$ för alla $x > 1$ vilket medför att $f$ är strängt växande på intervallet $x > 1$.

---

4. Karakteristisk ekvation är här $r^2 - 2r + 5 = 0 \Leftrightarrow (r-1)^2 = -4 \Leftrightarrow r = 1 \pm 2i$. Följaktligen är $y_h = (A \cos 2x + B \sin 2x)e^x$ den allmänna lösningen till ekvationen $y'' - 2y' + 5y = 0$.

Betrakta ekvationen $y'' - 2y' + 5y = e^{2x}$. Ansats $y = a e^{2x}$ ger $y' = 2a e^{2x}$, $y'' = 4a e^{2x}$ vilket, insatt i ekvationen, ger $4a e^{2x} - 4a e^{2x} + 5a e^{2x} = e^{2x} \Leftrightarrow a = \frac{1}{5}$, alltså $y_p = \frac{1}{5} e^{2x}$ är en partikulärlösning.

Den allmänna lösningen är $y = y_h + y_p$ dvs $y = (A \cos 2x + B \sin 2x)e^x + \frac{1}{5} e^{2x}$.

**Svar:** $y = (A \cos 2x + B \sin 2x)e^x + \frac{1}{5} e^{2x}$.

---

5. $$\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx = \{ \sqrt{x-1} = t,\ x - 1 = t^2,\ dx = 2t\,dt \} = \int_0^1 \frac{2}{1+t^2}\,dt = \Big[2 \arctan t\Big]_0^1 = 2\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{2}.$$

**Svar:** $\frac{\pi}{2}$.

---

6. Vi har

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^2 x + 3 \sin x + 2}\,dx = \{ \sin x = t,\ \cos x\,dx = dt \} = \int_0^1 \frac{1}{t^2+3t+2}\,dt =$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{(t+1)(t+2)}\,dt = \{ \text{uppdelning i partialbråk} \} = \int_0^1 \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2}\right)dt =$$
$$= \Big[\ln|t+1| - \ln|t+2|\Big]_0^1 = 2 \ln 2 - \ln 3.$$

**Svar:** $2 \ln 2 - \ln 3$.

---

7. Vi har

$$f(x) = (x^2 - 3)e^x,$$
$$f'(x) = 2x\,e^x + (x^2 - 3)e^x = (x^2 + 2x - 3)e^x \quad \text{och}$$
$$f''(x) = (2x + 2)e^x + (x^2 + 2x - 3)e^x = (x^2 + 4x - 1)e^x.$$

Eventuella lokala extrempunkter fås ur ekvationen $f'(x) = 0$:

$$(x^2 + 2x - 3)e^x = 0 \iff x^2 + 2x - 3 = 0 \iff x = -3 \text{ eller } x = 1.$$

I dessa punkter är $f''(-3) < 0$ och $f''(1) > 0 \Rightarrow x = -3$ är en lokal maximipunkt och $x = 1$ är en lokal minimipunkt.

Eftersom $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty > f(-3) \Rightarrow$ största värdet ej antas.

Eftersom $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 > f(1) = -2e \Rightarrow f$ antar minsta värdet i punkten $x = 1$.

**Svar:** lok. min. i $x = 1$, lok. max. i $x = -3$, minsta värde $-2e$.

---

8. Implicit derivering av $x + 1 - \ln 2x = y - \ln y$ ger

$$1 - \frac{1}{x} = y' - \frac{y'}{y} \qquad (*)$$

och för $x = 1$, $y = 2$ fås $y'(1) = 0$, alltså $x = 1$ är en kritisk punkt för funktionen $y$.

Implicit derivering av $(*)$ ger

$$\frac{1}{x^2} = y'' - \frac{y''y - (y')^2}{y^2}$$

och för $x = 1$, $y = 2$, $y'(1) = 0$ fås $y''(1) = 2$. Eftersom $y'(1) = 0$ och $y''(1) > 0$ så är $x = 1$ en lokal minimipunkt för funktionen $y$ dvs $y(x) \geq y(1) = 2$ om $x$ ligger tillräckligt nära 1.

**Svar:** $y'(1) = 0$. Sant.

---

9. De tre ingredienserna kostar $x, y$ respektive $z$ kr/liter. En blandning i proportionerna 1:1:2 kostar $a$ kr/liter. Då gäller

$$\begin{cases} 3x + y + z = (3 + 1 + 1) \cdot 48 \\ 2x + y + 2z = (2 + 1 + 2) \cdot 80 \\ x + y + 2z = (1 + 1 + 2) \cdot a \end{cases}$$

Man får

$$x = 400 - 4a,\ y = 16a - 1520,\ z = 560 - 4a$$

och eftersom $x > 0, y > 0$ och $z > 0$ så får vi att $95 < a < 100$.

**Svar:** Mellan 95 och 100 kr.

---

10. Generalisering i 0: För $0 < x \leq 1$ har vi

$$0 \leq \frac{1 + \sin x}{\sqrt{x} + x^2} \leq \frac{2}{\sqrt{x} + x^2} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$$

och integralen $\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{x}}\,dx$ är konvergent $\Rightarrow$ integralen $\int_0^1 \frac{1 + \sin x}{\sqrt{x} + x^2}\,dx$ är konvergent.

Generalisering i oändligheten: För $x \geq 1$ har vi

$$0 \leq \frac{1 + \sin x}{\sqrt{x} + x^2} \leq \frac{2}{\sqrt{x} + x^2} \leq \frac{2}{x^2}$$

och integralen $\int_1^\infty \frac{2}{x^2}\,dx$ är konvergent $\Rightarrow$ integralen $\int_1^\infty \frac{1 + \sin x}{\sqrt{x} + x^2}\,dx$ är konvergent.

$\int_0^1 \frac{1 + \sin x}{\sqrt{x} + x^2}\,dx$ och $\int_1^\infty \frac{1 + \sin x}{\sqrt{x} + x^2}\,dx$ båda konvergenta $\Rightarrow$ **Svar:** Integralen är konvergent.

---