KTH Matematik

Lösningar tentamen 2 juni 2006 i 5B1132/5B1140, Amelia1

1. Vi söker vinkeln mellan vektorerna $\mathbf{v}_1 = (4, -2, -2) = 2(2, -1, -1)$ och $\mathbf{v}_2 = (5, 5, -10) = 5(1, 1, -2)$.
Kalla vinkeln mellan vektorerna α. Då är skalärprodukten $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = |\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2| \cos\alpha$, så $\cos\alpha = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2|} = \frac{2(2,-1,-1)\cdot 5(1,1,-2)}{2|(2,-1,-1)|5|(1,1,-2)|} = \frac{2\cdot 1+(-1)\cdot 1+(-1)\cdot(-2)}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}^2} = \frac{1}{2}$, så **svar: Vinkeln är $\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$.**

2. Vi skall visa att $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ för $n = 1, 2, \ldots$
Vi använder induktion och kallar påståendet (för n) P_n.
Bas: Visa P_1. $\mathrm{VL}_1 = 1 \cdot 2 = 2$, $\mathrm{HL}_1 = \frac{1(1+1)(1+2)}{3} = 2$, OK!
Steg: Antag P_k, dvs $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$.
Då fås $\mathrm{VL}_{k+1} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \mathrm{VL}_k + (k+1)(k+2) \overset{\text{ind.ant.}}{=} \mathrm{HL}_k + (k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)}{3}(k+3) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} = \mathrm{HL}_{k+1}$.
Vi har alltså visat P_1 och $P_k \Rightarrow P_{k+1}$ för godtyckligt $k = 1, 2, \ldots$ Enligt induktionsprincipen följer att P_n är sann för $n = 1, 2, \ldots$ **Saken är klar.**

3. Vi söker de värden funktionen $f(x) = (-2x^2 + 3x)\, e^x$ antar i intervallet $[0, 2]$.
$f(x)$ är kontinuerlig på ett slutet, begränsat intervall, så den antar ett största och ett minsta värde. Möjliga punkter där detta kan ske är stationära punkter (där $f'(x) = 0$), randpunkter (intervallets ändpunkter) och singulära punkter (där $f(x)$ inte är deriverbar).
$f'(x) = (-4x+3)e^x + (-2x^2+3x)e^x = (-2x^2 - x + 3)e^x = -2(x + \frac{3}{2})(x-1)e^x$, så enda singulära punkten i intervallet är $x = 1$. Randpunkter är 0 och 2. Singulära punkter saknas, eftersom $f(x)$ är deriverbar för alla x.

Tabell:

x	0		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e	$\searrow$	$-2e^2$

Eftersom $f(x)$ är kontinuerlig, antar den i intervallet alla värden mellan det största (e) och det minsta ($-2e^2$).

Svar: $\boldsymbol{f(x)}$ antar precis värdena i intervallet $\boldsymbol{[-2e^2, e]}$.

4. Vi finner den obestämda integralen med partialintegration:
$\int (x^3+x)\ln x\, dx = (\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2})\ln x - \int (\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2})\frac{1}{x}dx = (\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2})\ln x - \int (\frac{x^3}{4} + \frac{x}{2})dx = (\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2})\ln x - (\frac{x^4}{16} + \frac{x^2}{4}) + C$, C en godtycklig konstant, **svaret.**

5. Då området $\{(x, y) \mid 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\}$ roteras kring x-axeln genereras en kropp med volym

$$\pi \int_0^3 \left(\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\right)^2 dx = \pi \int_0^3 \frac{x}{(1+x^2)^2}\, dx = \left[\begin{array}{c} t = x^2 \\ dt = 2x\, dx \end{array}, \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 3 & 9 \\ 0 & 0 \end{array}\right] = \pi \int_0^9 \frac{1}{2}\frac{1}{(1+t)^2}\, dt =$$

$$\pi \left[\frac{-1}{2(1+t)}\right]_0^9 = \pi\left(\frac{-1}{20} - \frac{-1}{2}\right) = \frac{9\pi}{20} \text{ (v.e.)}.$$

Svar: Den sökta volymen är $\boldsymbol{\frac{9\pi}{20}}$ v.e.

6. A är inverterbar precis om dess determinant inte är 0, $\det A \neq 0$.

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & a-1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & a+1 \end{vmatrix} \overset{\left[\begin{smallmatrix} 1\cdot k1 \text{ till } k2 \\ -1\cdot k1 \text{ till } k3 \\ -2\cdot k1 \text{ till } k4 \end{smallmatrix}\right]}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & a-2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a-1 \end{vmatrix} =$$

$= -1 \cdot 1 \cdot (a-2)(a-1) = -(a-2)(a-1)$, så $\det A \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1, 2$.

Svar: Matrisen $\boldsymbol{A}$ är inverterbar precis då $\boldsymbol{a \neq 1, 2}$.

7. Vi söker den allmänna lösningen till ekvationen $y'' - 4y' + 4y = (1 + \sin x)e^{2x}$.
För att förenkla ekvationen inför vi $z(x)$ enligt $y(x) = z(x)e^{2x}$.
Förskjutningsregeln (eller direkt beräkning av y', y'' och insättning) ger
$y'' - 4y' + 4y = (D^2 - 4D + 4)y = (D^2 - 4D + 4)(ze^{2x}) = e^{2x}((D+2)^2 - 4(D+2) + 4)z = e^{2x}D^2 z = z''e^{2x}$, så ekvationen blir $z'' = 1 + \sin x$ och vi får $z' = x - \cos x + A$, $z = \frac{x^2}{2} - \sin x + Ax + B$, A, B godtyckliga konstanter.

Svar: Lösningen är $\boldsymbol{y(x) = (\frac{x^2}{2} + Ax + B - \sin x)e^{2x}}$, A, B godtyckliga.

8. Ekvationen $\arctan(2xy + y^2) - 2y\ln(3x + y) = x + y + 1$ definierar y som en funktion av x lokalt kring punkten $(1, -2)$. Vi söker ekvationen för tangenten till grafen i punkten.
Implicit derivering av ekvationen ger

$$\frac{1}{1+(2xy+y^2)^2}(2y + 2xy' + 2yy') - 2y'\ln(3x + y) - 2y\frac{1}{3x+y}(3 + y') = 1 + y',$$

dvs i punkten $x = 1$, $y = -2$: $1(-4 + 2y' - 4y') - 0 + 4(3 + y') = 1 + y'$, så $y'_{(1,-2)} = -7$. Detta är riktningskoefficienten för tangenten, så dess ekvation ges av $y - (-2) = -7(x - 1)$, dvs $7x + y - 5 = 0$.

Svar: Ekvationen för tangenten i punkten är $\boldsymbol{7x + y - 5 = 0}$.

9. Vi söker ekvationen för den ortogonala projektionen av linjen $(x, y, z) = (4 + 3t, 5t, -2 + t)$ på planet $2x + y - 2z = 3$.
Låt $\mathbf{n}$ vara planets normalvektor $(2, 1, -2)$ och Q vara punkten $(0, 3, 0)$, som ligger i planet. Vektorn från en godtycklig punkt P till dess projektion i planet ges då av den vinkelräta projektionen av vektorn $\boldsymbol{PQ}$ på $\mathbf{n}$. Om P har koordinaterna (x, y, z) har alltså projektionspunkten koordinater $(x, y, z) + \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\mathbf{n}$, där $\mathbf{u} = (-x, 3 - y, -z)$ är vektorn $\boldsymbol{PQ}$.
Punkten $(4 + 3t, 5t, -2 + t)$ på linjen projiceras alltså på
$(4 + 3t, 5t, -2 + t) + \frac{(-4-3t,3-5t,2-t)\cdot(2,1,-2)}{(2,1,-2)\cdot(2,1,-2)}(2, 1, -2) = (4 + 3t, 5t, -2 + t) + \frac{-9-9t}{9}(2, 1, -2) = (4 + 3t, 5t, -2 + t) + (-1 - t)(2, 1, -2) = (2 + t, -1 + 4t, 3t)$, vilket ger ekvationen för den sökta linjen.

Svar: Den ortogonala projektionen har ekvationen $\boldsymbol{(x, y, z) = (2 + t, -1 + 4t, 3t)}$.

10. Vi studerar konvergens för serien $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} - \cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
De kända ML-utvecklingarna ($\mathcal{O}$ då $t \to 0$):
$\sqrt{1-t} = 1 - \frac{1}{2}t + \mathcal{O}(t^2)$ och $\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \mathcal{O}(t^4)$ ger att ($\mathcal{O}$ då $n \to \infty$)
$\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} = \sqrt{1 - \frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{2n} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$ och $\cos\frac{1}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{1}{2n} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$.
Termerna i serien är alltså $\mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$, så (enligt sats 9.8 i boken, termernas belopp majoreras ju av $\frac{c}{n^2}$ för någon konstant c) serien konvergerar.

Svar: Serien är konvergent.