Lösningsförslag till tentamen i 5B1132, för BD, M, P, T den 2006–12–20.

1. Matrisen $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}} + 2\boldsymbol{A}^{-1}$ är inverterbar om och endast om determinanten $\det(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}} + 2\boldsymbol{A}^{-1}) \neq 0$. Man får

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}} + 2\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ och } \det(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}} + 2\boldsymbol{A}^{-1}) = 3 \neq 0.$$

Svar: Matrisen är inverterbar.

---

2. Linjernas riktningsvektorer $(1,-2,1)$ respektive $(1,-6,4)$ är parallella med det sökta planet. Vektorprodukten mellan dessa båda vektorer ger en normalvektor för planet. Man får vektorprodukten $(1,-2,1) \times (1,-6,4) = -(2,3,4)$. Planet ges alltså av ekvationen $2x + 3y + 4y = d$ för något tal d. Eftersom punkten $\boldsymbol{r}(0) = (3,1,-1)$ uppfyller denna ekvation så måste $d = 5$.

Svar: $2x + 3y + 4y = 5$.

---

3. Implicit derivering ger

$$\frac{3 + y'}{2\sqrt{3x + y}} + 2x + 4yy' = 0$$

För $x = 0$ och $y = 1$ fås $\dfrac{3 + y'(0)}{2} + 4y'(0) = 0$ dvs $y'(0) = -\dfrac{1}{3}$.

Tangenten ges av $\dfrac{y-1}{x-0} = y'(0)$ dvs $x + 3y = 3$.

Normalen ges av $\dfrac{y-1}{x-0} = -\dfrac{1}{y'(0)}$ dvs $3x - y = -1$.

Svar: Tangent $x + 3y = 3$; Normal $3x - y = -1$.

---

4. Vi har

$$\sin 3x = \{\, 3x = t \,\} = \sin t = t - \frac{1}{3!}t^3 + O(t^5) = 3x - \frac{9}{2}x^3 + O(x^5)$$

$$\cos 2x = \{\, 2x = t \,\} = \cos t = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + O(t^4) = 1 - 2x^2 + O(x^4)$$

$$f(x) = (1 + 2\sin 3x)\cos 2x = (1 + 6x - 9x^3 + O(x^5))(1 - 2x^2 + O(x^4)) = 1 + 6x - 2x^2 - 21x^3 + O(x^4).$$

Svar: $1 + 6x - 2x^2 - 21x^3 + O(x^4)$.

---

5. $$\int_0^\infty \frac{1}{(x+2)\sqrt{x+1}}\,dx = \{\, \sqrt{x+1} = t,\ x + 1 = t^2,\ dx = 2t\,dt \,\} = \int_1^\infty \frac{2}{1+t^2}\,dt = \Big[2\arctan t\Big]_1^\infty = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Svar: $\dfrac{\pi}{2}$.

---

6. $$\int_0^9 \frac{1}{x + 5\sqrt{x} + 6}\,dx = \{\, \sqrt{x} = t,\ x = t^2,\ dx = 2t\,dt \,\} = \int_0^3 \frac{2t}{t^2 + 5t + 6}\,dt = \int_0^3 \frac{2t}{(t+2)(t+3)}\,dt =$$

$$= \{\text{ uppdelning i partialbråk }\} = \int_0^3 \left(\frac{6}{t+3} - \frac{4}{t+2}\right)dt = \Big[6\ln(t+3) - 4\ln(t+2)\Big]_0^3 =$$

$$= 6\ln 6 - 4\ln 5 - 6\ln 3 + 4\ln 2 = 10\ln 2 - 4\ln 5.$$

Svar: $10 \ln 2 - 4 \ln 5$.

7. Karakteristisk ekvation är $r^2 - 2r + 1 = 0$. Man får $r = \pm 1$ alltså $y_h = (A + Bx)e^x$ är den allmänna lösningen till ekvationen $y'' - 2y' + y = 0$.

Betrakta ekvationen $y'' - 2y' + y = x$. Ansats $y = ax + b$ ger $y' = a$, $y'' = 0$ vilket, insatt i ekvationen, ger $-2a + ax + b = x$. Eftersom detta skall vara en identitet så måste koefficienterna för respektive x–potenser vara lika: $a = 1$ och $b - 2a = 0$ dvs $a = 1$ och $b = 2$. Vi får att $y_1 = x + 2$ är en partikulärlösning till ekvationen $y'' - 2y' + y = x$.

Vi observerar att $50 \sin x \cos x = 25 \sin 2x$ och vi söker en partikulärlösning till ekvationen $y'' - 2y' + y = 25 \sin 2x$. Ansats $y = a \cos 2x + b \sin 2x$ ger $y' = -2a \sin 2x + 2b \cos 2x$ och $y'' = -4a \cos 2x - 4b \sin 2x$ vilket ger $(4a - 3b) \sin 2x - (3a + 4b) \cos 2x = 25 \sin 2x$ dvs $4a - 3b = 25$ och $3a + 4b = 0$. Man får att $a = 4$, $b = -3$ alltså $y_2 = 4 \cos 2x - 3 \sin 2x$ är en partikulärlösning till ekvationen $y'' - 2y' + y = 50 \sin x \cos x$.

Följaktligen är $y = y_h + y_1 + y_2$ den allmänna lösningen till den givna differentialekvationen

Svar: $y = (A + Bx)e^x + x + 2 + 4 \cos 2x - 3 \sin 2x$.

8a. Vi har

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x}\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{x - x^2}}.$$

Svar: $\dfrac{1}{\sqrt{x - x^2}}$.

8b. Funktionen $f(x) = 4 \arcsin \sqrt{x} + 2 \arcsin \sqrt{1-x}$ är definierad och kontinuerlig på intervallet $0 \le x \le 1$. För $0 < x < 1$ är f deriverbar och $f'(x) > 0$ vilket innebär att f är strängt växande på detta intervall. Kontinuiteten av f medför att f är strängt växande på intervallet $0 \le x \le 1$ och följaktligen är f inverterbar.

8c. Värdemängden för f^{-1} är = definitionsmängden för f dvs = $[0,1]$ $\Rightarrow$ största värdet av f^{-1} är = 1.

Svar: 1.

9. Vi har

$$a_n = \frac{1}{n} + \ln \frac{n+a}{n} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right) = \frac{1}{n} + \left(\frac{a}{n} - \frac{a^2}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \frac{1+a}{n} + \frac{a^2}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Om $a \ne -1$ är $a_n = \dfrac{1+a}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ och jämförelse med serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ visar att serien $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ divergerar.

Om $a = -1$ är $a_n = \dfrac{1}{2n^2} + O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ och jämförelse med serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ visar att serien $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ är konvergent.

Svar: Serien är konvergent om och endast om $a = -1$.

10. Inför ett koordinatsystem på ön. Låt $g = (g_1, g_2)$, $v = (v_1, v_2)$ och $s = (s_1, s_2)$ betyda galgen, den vita och den svarta stenen. Vägen från g till v ges av vektorn $\boldsymbol{a} = (v_1 - g_1, v_2 - g_2)$. Man fortsätter sedan längs vektorn $\boldsymbol{a}' = (g_2 - v_2, v_1 - g_1)$. Den första markerade punkten ligger i $p = (g_1, g_2) + \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}' = (v_1 - v_2 + g_2, v_1 + v_2 - g_1)$.

Vägen från g till s ges av vektorn $\boldsymbol{b} = (s_1 - g_1, s_2 - g_2)$. Man fortsätter sedan längs vektorn $\boldsymbol{b}' = (s_2 - g_2, g_1 - s_1)$ och markerar punkten $q = (g_1, g_2) + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}' = (s_1 + s_2 - g_2, s_2 - s_1 + g_1)$. Julklappen finns i $(p + q)/2 = (v_1 - v_2 + s_1 + s_2, v_1 + v_2 + s_2 - s_1)/2$.