Lösningsförslag till tentamen i 5B1132, för BD, M, P, T den 2007–05–31.

1. Man får att

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

och

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Svar: $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$

---

2. Påståendet är sant för $n = 1$: talet $9^1 - 1$ är delbart med 8.

Antag att påståendet är sant för något $n = k$, dvs antag att $9^k - 1$ är delbart med 8.

Vi visar att påståendet är sant för $n = k + 1$, dvs visa att $9^{k+1} - 1$ är delbart med 8:

$$9^{k+1} - 1 = 9 \cdot 9^k - 1 = 8 \cdot 9^k + (9^k - 1)$$

och eftersom uttrycket inom parantesen är delbart med 8 (enligt antagandet) så är $8 \cdot 9^k + (9^k - 1)$ delbart med 8. Enligt induktion är påståendet sant för $n = 1, 2, \ldots$.

---

3. För $0 < x < 1$ har vi

$$f'(x) = \frac{4x}{\sqrt{1-(2x^2-1)^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{4x}{2|x|\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = \{ x > 0 \} =$$

$$= \frac{4x}{2x\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Detta innebär att f är en konstant funktion på intervallet $0 < x < 1$. Kontinuiteten av f medför att f är konstant på intervallet $0 \le x \le 1$. Man får $f(1) = \arcsin 1 + 2 \arccos 1 = \pi/2$, dvs det konstanta värdet är $\pi/2$.

Svar: $\pi/2$.

---

4. Man får

$$\int_{-1}^{1} (1-2x)e^{-2x}\,dx = \int_{-1}^{1} (1-2x)(-e^{-2x}/2)'\,dx = \{ \text{partiell integration} \} =$$

$$= \Big[-e^{-2x}(1-2x)/2\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (1-2x)'(-e^{-2x}/2)\,dx =$$

$$= e^{-2}/2 + 3e^{2}/2 - \int_{-1}^{1} e^{-2x}\,dx = e^{-2}/2 + 3e^{2}/2 - \Big[-e^{-2x}/2\Big]_{-1}^{1} =$$

$$= e^{-2}/2 + 3e^{2}/2 + e^{-2}/2 - e^{2}/2 = e^{-2} + e^{2}.$$

Svar: $e^{-2} + e^{2}$.

---

5. Man får

$$\int_{-1}^{\infty} \frac{1}{(x+3)\sqrt{x+2}}\,dx = \{ \sqrt{x+2} = t,\ x + 2 = t^2,\ dx = 2t\,dt \} =$$

$$= \int_1^{\infty} \frac{2}{1+t^2}\,dt = \Big[2 \arctan t\Big]_1^{\infty} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Svar: $\frac{\pi}{2}$.

---

6. Vi har

$$\frac{x^2+5x+5}{x^2+3x+2} = 1 + \frac{2x+3}{x^2+3x+2} = 1 + \frac{2x+3}{(x+1)(x+2)} = 1 + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}$$

och vi får

$$\int_0^1 \frac{x^2+5x+5}{x^2+3x+2}\,dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}\right) dx = \Big[x + \ln(x+1) + \ln(x+2)\Big]_0^1$$

Svar: $1 + \ln 3$.

---

7. Låt $y_1 = x^3 - x^2$, $y_2 = 2x$. Vi har

$$y_1 - y_2 = x^3 - x^2 - 2x = x(x+1)(x-2).$$

Man får att

$$y_1 - y_2 \geq 0 \quad \text{för} \quad -1 \leq x \leq 0$$

och

$$y_1 - y_2 \leq 0 \quad \text{för} \quad 0 \leq x \leq 2.$$

Detta medför att

$$A = \int_{-1}^{0} (y_1 - y_2)\,dx - \int_0^2 (y_1 - y_2)\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} (x^3 - x^2 - 2x)\,dx - \int_0^2 (x^3 - x^2 - 2x)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^2 = \frac{37}{12}.$$

Svar: $\frac{37}{12}$.

---

8. Vi har $a_n = \left(\frac{3}{n}\right)^n \cdot n! > 0$, och

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot n^n}{3^n \cdot n! \cdot (n+1)^{n+1}} = \frac{3n^n}{(n+1)^n} = \frac{3}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{3}{e} \quad \text{då } n \to \infty.$$

Eftersom $\frac{3}{e} > 1 \Rightarrow$ (enligt kvotkriteriet) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är divergent.

Svar: Divergent.

---

9. Låt

$$g(x) = x^2 + 6x + 10, \; -4 \leq x \leq -1$$

och

$$h(x) = -2x^3 + 3x^2, \; -1 \leq x \leq 2.$$

Funktionerna g och h är kontinuerliga och $g(-1) = h(-1)$. Detta medför att funktionen f är kontinuerlig på det slutna begränsade intervallet $-4 \leq x \leq 2$. Följaktligen antar f ett största och ett minsta värde på intevallet och även alla mellanliggande värden. Ett extremvärde antas antingen i en singulär punkt, en kritisk punkt eller i en ändpunkt på intervallet. Här har vi

Singulära punkter: punkten $x = -1$.

Ändpunkterna: $x = -4$ och $x = 2$.

Kritiska punter = lösningarna till någon av ekvationerna $g'(x) = 0$, $h'(x) = 0$:

Ur $g'(x) = 2x + 6 = 0$ fås $x = -3$ och $h'(x) = -6x^2 + 6x = 0$ ger $x = 0$ och $x = 1$.

Sammanfattningsvis får vi följande punkter $-4, -3, -1, 0, 1$ och 2. I dessa punkter antar f värdena $2, 1, 5, 0, 1$ och -4 alltså f:s största värde = 5, minsta värde = -4 och värdemängden ges av $-4 \le y \le 5$.

Svar: $[-4,5]$.

10a. Vi har

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)E =$$
$$= \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a(a + d) & b(a + d) \\ c(a + d) & d(a + d) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix} = 0.$$

10b. Om $\boldsymbol{A}^3 = \mathbf{0}$ så har vi $\det(\boldsymbol{A}) = ad - bc = 0$. Enligt a är $\boldsymbol{A}^2 = (a + d)\boldsymbol{A}$. Ledvis multilpikation med $\boldsymbol{A}$ ger

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{A}^3 = (a + d)\boldsymbol{A}^2 = (a + d)(a + d)\boldsymbol{A} = (a + d)^2\boldsymbol{A}$$

vilket medför att $a + d = 0$ och ur a fås $\boldsymbol{A}^2 = \mathbf{0}$.
