1. Man får

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm T} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$2\boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm T} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ och } \det(2\boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm T}) = 19.$$

Svar: 19.

---

2. Polynomdivision ger

$$(z^3 + (6 + \mathrm i)z^2 + (6 + 2\mathrm i)z + 4 + 6\mathrm i):(z + \mathrm i) = z^2 + 6z + 6 - 4\mathrm i$$

vilket visar att $z = -\mathrm i$ är en rot till ekvationen. De övriga två rötterna uppfyller ekvationen

$$z^2 + 6z + 6 - 4\mathrm i = 0.$$

Kvadratkomplettera och förenkla:

$$z^2 + 6z + 6 - 4\mathrm i = z^2 + 2 \cdot 3z + 3^2 - 3^2 + 6 - 4\mathrm i = (z + 3)^2 - 3 - 4\mathrm i.$$

Ekvationen kan skrivas på formen $(z + 3)^2 = 3 + 4\mathrm i$. Sätt $z + 3 = a + b\mathrm i$, där a och b är reella:

$$(a + b\mathrm i)^2 = 3 + 4\mathrm i \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2ab\mathrm i = 3 + 4\mathrm i.$$

Detta innebär att

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 & \Rightarrow a^2 - 4/a^2 = 3 \Rightarrow a^4 - 3a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow\ a_1 = 2,\ a_2 = -2 \\ 2ab = 4 \ \Rightarrow b = 2/a & b_1 = 1,\ b_2 = -1 \end{cases}$$

alltså $z_1 + 3 = 2 + \mathrm i$, $z_2 + 3 = -2 - \mathrm i$ dvs $z_1 = -1 + \mathrm i$, $z_2 = -5 - \mathrm i$

Svar: $-\mathrm i$, $-1 + \mathrm i$ och $-5 - \mathrm i$.

---

3. Funktionen $f(x) = \arctan 2x + \dfrac{2x + 1}{4x^2 + 1}$ är definierad och deriverbar för alla x. Vi har

$$f'(x) = \frac{2}{1 + 4x^2} + \frac{2(4x^2 + 1) - 8x(2x + 1)}{(4x^2 + 1)^2} = \frac{4(1 - 2x)}{(4x^2 + 1)^2}$$

och ur ekvationen $f'(x) = 0$ får man en kritisk punkt $x = 1/2$.

På intervallet $x \le 1/2$ är $f'(x) \ge 0 \Rightarrow f$ är växande på detta intervall.

På intervallet $1/2 \le x$ är $f'(x) \le 0 \Rightarrow f$ är avtagande på detta intervall.

Detta innebär att $x = 1/2$ är en lokal maximipunkt till f.

Svar: $x = 1/2$ är en lokal maximipunkt till f.

---

4. Karakteristisk ekvation är här

$$r^2 + 4r + 13 = 0$$

$\Leftrightarrow (r + 2)^2 = -9 \Leftrightarrow r = -2 \pm 3\mathrm i$. Följaktligen är

$$y_h = (A \cos 3x + B \sin 3x)\mathrm e^{-2x}$$

den allmänna lösningen till ekvationen $y'' + 4y' + 13y = 0$.

Betrakta ekvationen

$$y'' + 4y' + 13y = 13x - 9.$$

Ansats $y = ax + b$ ger $y' = a$, $y'' = 0$ vilket, insatt i ekvationen, ger

$$4a + 13(ax + b) = 13x - 9$$

$\Leftrightarrow$ $13ax + 4a + 13b = 13x - 9$. Eftersom detta skall vara en identitet så måste koefficienterna för respektive x–potenser vara lika: $13a = 13$ och $13b + 4a = -9$ $\Leftrightarrow$ $a = 1$ och $b = -1$ vilket innebär att $y_p = x - 1$ är en partikulärlösning.

Den allmänna lösningen är $y = y_h + y_p$ dvs $y = (A \cos 3x + B \sin 3x)e^{-2x} + x - 1$.

Svar: $y = (A \cos 3x + B \sin 3x)e^{-2x} + x - 1.$

---

5. Arean ges av

$$\int_2^\infty y \, dx = \int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{x-1}} \, dx = \{ \sqrt{x-1} = t, \; x = 1 + t^2, \; dx = 2t \, dt \} =$$

$$= \int_1^\infty \frac{2}{1+t^2} \, dt = 2 \Big[\arctan t\Big]_1^\infty = 2(\pi/2 - \pi/4) = \pi/2.$$

Svar: $\pi/2$.

---

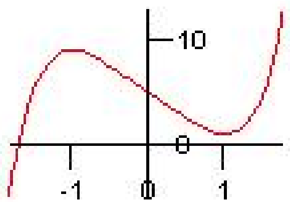
6. $$\int_3^4 \frac{1}{x + 4\sqrt{x-3}} \, dx = \{ \sqrt{x-3} = t, \; x - 3 = t^2, \; dx = 2t \, dt \} = \int_0^1 \frac{2t}{t^2 + 4t + 3} \, dt = \int_0^1 \frac{2t}{(t+1)(t+3)} \, dt =$$

$$= \{\text{uppdelning i partialbråk}\} = \int_0^1 \left(\frac{3}{t+3} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \Big[3 \ln(t+3) - \ln(t+1)\Big]_0^1 =$$

$$= 3 \ln 4 - \ln 2 - 3 \ln 3 + \ln 1 = 5 \ln 2 - 3 \ln 3.$$

Svar: $5 \ln 2 - 3 \ln 3$.

---

7. 

Vi har $f'(x) = 5x^4 - 5$ och ur $5x^4 - 5 = 0$ fås de enda kritiska punkterna $x = \pm 1$. Dessutom är $f''(x) = 20x^3$, $f''(-1) = -20 < 0$ och $f''(1) = 20 > 0$, vilket innebär att $x = -1$ är en lokal maximipunkt och $x = 1$ är en lokal minimipunkt.

Det lokala maximivärdet är $f(-1) = 9$ och minimivärdet $f(1) = 1$. Då $x \to \pm\infty$ gäller $f(x) \to \pm\infty$.

De lokala extremvärdena 1 och 9 antas två gånger, medan övriga värden, dvs $y > 9$ och $y < 1$ antas en gång. Alltså gäller att 0 antas en gång, 1 antas två gånger och 2 antas tre gånger.

Svar: $\begin{cases} \text{Lokal maximum i } x = -1, \text{ lokal minimum i } x = 1. \\ 0 \text{ antas en gång, } 1 \text{ antas två gånger och } 2 \text{ antas tre gånger.} \end{cases}$

---

8. Kurvan $y^2 = x \ln(2 - x)$ skär x–axeln då $x \ln(2 - x) = 0$ dvs då $x = 0$ eller $x = 1$. Kurvan är symmetrisk med avseende på rotationsaxeln. Volymen ges av

$$\pi \int_0^1 y^2 \, dx = \pi \int_0^1 x \ln(2 - x) = \{ \text{partiell integration} \} =$$

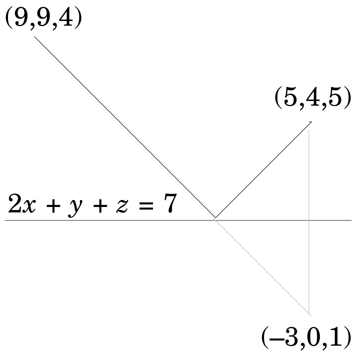
$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} \ln(2 - x)\right]_0^1 - \pi \int_0^1 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{-1}{2 - x} \, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{2 - x} \, dx =$$

$$= \{ 2 - x = t, \; dx = -dt \} = -\frac{\pi}{2} \int_2^1 \frac{(2 - t)^2}{t} \, dt = \frac{\pi}{2} \int_1^2 \left(\frac{4}{t} - 4 + t\right) dt =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[4 \ln t - 2t + \frac{t^2}{2}\right]_1^2 = 2\pi \ln 2 - \frac{5\pi}{4}.$$

$$\boxed{\textbf{Svar: } 2\pi \ln 2 - \frac{5\pi}{4}.}$$

9.



Vi söker spegelbilden av punkten $(5,4,5)$. Varje normal till planet $2x + y + z = 7$ har riktning av vektorn $(2,1,1)$. Den normal som går genom punkten $(5,4,5)$ har parameterframställningen

$$x = 5 + 2t,\ y = 4 + t,\ z = 5 + t$$

vilket insatt i planets ekvationen

$$2 \cdot (5 + 2t) + 4 + t + 5 + t = 7$$

ger det parametervärde som svarar mot skärningspunkten mellan normalen och planet.

Man får $t = -2$. Går man den dubbla sträckan (dvs $t = -4$) får man den punkt som är symmetrisk till punkten $(5,4,5)$ med avseende på planet $2x + y + z = 7$, dvs den sökta spegelbilden ges av $x = 5 + 2 \cdot (-4) = -3$, $y = 4 + (-4) = 0$, $z = 5 + (-4) = 1$, alltså $(-3,0,1)$.

Den rätta linje som genom punkterna $(9,9,4)$ och $(-3,0,1)$ har parameterframställningen

$$(x,y,z) = (9,9,4) + t((9,9,4) - (-3,0,1)) = (9 + 12t, 9 + 9t, 4 + 3t)$$

vilket insatt i planets ekvationen

$$2 \cdot (9 + 12t) + 9 + 9t + 4 + 3t = 7$$

ger det parametervärde som svarar mot den sökta reflekterinspunkten. Man får $t = -\frac{2}{3}$ dvs punkten $(1,3,2)$.

$$\boxed{\textbf{Svar: } (1,3,2).}$$

---

10. Vi har

$$\frac{3n}{n+1} - 3 + \frac{a}{n} = \frac{(a-3)n + a}{n(n+1)} = \frac{a-3}{n+1} + \frac{a}{n(n+1)}.$$

Om $a \neq 3$ är

$$\frac{a-3}{n+1} + \frac{a}{n(n+1)} = \frac{a-3}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

och serien är divergent.

Om $a = 3$ får vi serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n} - \frac{3}{n+1}\right) = \left(3 - \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{3}\right) + \left(\frac{3}{3} - \frac{3}{4}\right) + \ldots = 3.$$

$$\boxed{\textbf{Svar: } \text{Serien är konvergent endast om } a = 3. \text{ Seriens summa är då } 3.}$$
