Lösningsförslag till tentamensskrivningen i SF1618, för BD, M, P och T, 2008–05–29.

1. Vi har

$$\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 2 & a \\ a & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Man får att determinanten $\det \boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}} = 0$ vilket innebär att den homogena linjära ekvationen $\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ har för varje a–värde oändligt många lösningar.

Svar: Det finns inte något sådant värde.

---

2. Linjernas riktningsvektorer (1,–2,1) respektive (1,–6,4) är parallella med det sökta planet. Vektorprodukten mellan dessa båda vektorer ger en normalvektor för planet. Man får vektorprodukten $(1,-2,1) \times (1,-6,4) = -(2,3,4)$. Planet ges alltså av ekvationen $2x + 3y + 4y = d$ för något tal d. Eftersom punkten $\boldsymbol{r}(0) = (3,1,-1)$ uppfyller denna ekvation så måste $d = 5$.

Svar: $2x + 3y + 4y = 5$.

---

3. Funktionen $f(x) = (x-4)\sqrt{x-1}$ är kontinuerlig på det slutna och begränsade intervallet $1 \le x \le 5 \Rightarrow f$ antar ett största och ett minsta värde på intervallet. Det största (resp. minsta) värdet antas antingen i en ändpunkt på intervallet eller en kritisk punkt eller i en singulär punkt.

Kritiska punkter fås $f'(x) = 0$. Vi har $f'(x) = \sqrt{x-1} + \dfrac{x-4}{2\sqrt{x-1}} = \dfrac{3x-6}{2\sqrt{x-1}} = 0 \Rightarrow x = 2$.

Singulära punkter är punkter där $f'(x)$ är ej definierad $\Rightarrow x = 1$ är en singulär punkt.

Aktuella punkter: 2, 1 och 5 (den andra ändpunkten).

I dessa punkter fås $f(2) = -2$, $f(1) = 0$, $f(5) = 2$.

Svar: 2 och –2.

---

4. Karakteristisk ekvation är här $r^2 - 8r + 16 = 0$ vilken har dubbelroten $r = 4$, alltså $y_h = (Ax + B)e^{4x}$ är den allmänna lösningen till $y'' - 8y' + 16y = 0$.

Betrakta ekvationen $y'' - 8y' + 16y = 128x + 16$. Vi ansätter $y = ax + b$ och får $y' = a$, $y'' = 0$ vilket, insatt i ekvationen, ger $-8a + 16(ax + b) = 128x + 16$, dvs $16ax + 16b - 8a = 128x + 16$. Eftersom detta skall vara en identitet så måste koefficienterna för respektive x-potenser vara lika: $16a = 128$ och $16b - 8a = 16$, dvs $a = 8$ och $b = 5$. Man får alltså partikulärlösningen $y_1 = 8x + 5$.

Betrakta ekvationen $y'' - 8y' + 16y = 5e^{5x}$. Vi ansätter $y = ae^{5x}$. Man får $y' = 5ae^{5x}$, $y'' = 25ae^{5x}$. Insättning i ekvationen ger villkoret $ae^{5x} = 5e^{5x}$ dvs $a = 5$. Funktionen $y_2 = 5e^{5x}$ är alltså en partikulärlösning till ekvationen.

Den givna ekvationen har alltså allmän lösning $y = 8x + 5 + 5e^{5x} + (Ax + B)e^{4x}$.

Svar: $y = 8x + 5 + 5e^{5x} + (Ax + B)e^{4x}$.

---

5. Kurvorna $y = \dfrac{1}{x-2}$ och $y = \dfrac{9}{x^2}$ skär varandra då $\dfrac{1}{x-2} = \dfrac{9}{x^2} \Rightarrow x^2 - 9x + 18 = 0 \Rightarrow x = 3$ eller $x = 6$. På intervallet $3 \le x \le 6$ är $\dfrac{1}{x-2} \le \dfrac{9}{x^2}$. Detta medför att den sökta arean ges av

$$A = \int_3^6 \left(\frac{9}{x^2} - \frac{1}{x-2}\right)dx = \left[\frac{-9}{x} - \ln|x-2|\right]_3^6 = \frac{3}{2} - 2\ln 2.$$

Svar: $3/2 - 2\ln 2$.

---

6. $\displaystyle\int_4^9 \frac{1}{(x-1)\sqrt{x}}\,dx = \{\sqrt{x} = t,\ x = t^2,\ dx = 2t\,dt\} = \int_2^3 \frac{2}{t^2-1}\,dt = \int_2^3 \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt =$

$= \Big[\ln|t-1| - \ln|t+1|\Big]_2^3 = \ln 3 - \ln 2.$ $\boxed{\textbf{Svar: } \ln 3 - \ln 2.}$

7a. Implicit derivering av $x^3 - 3xy - y^3 + 3 = 0$ ger $3x^2 - 3y - 3xy' - 3y^2y' = 0 \Rightarrow y' = \dfrac{x^2-y}{x+y^2}$.

7b. Man får $y'(1) = 0$ vilket innebär att $x = 1$ är en kritisk punkt till y.

7c. Implicit derivering av $y' = \dfrac{x^2-y}{x+y^2}$ ger $y'' = \dfrac{(2x-y')(x+y^2) - (x^2-y)(1+2yy')}{(x+y^2)^2}$ och för $x = 1, y = 1$ och $y' = 0$ fås $y'' = 1 > 0$ vilket medför att $x = 1$ är en lokal minimipunkt för funktionen y.

$\boxed{\textbf{Svar: } y' = \dfrac{x^2-y}{x+y^2};\ x = 1 \text{ är en lokal minimipunkt.}}$

8a. Vi har $y' = 1 + 2x$, $y'(n) = 1 + 2n$ och tangenten ges av $\dfrac{y-n-n^2}{x-n} = 1 + 2n$. För $x = 0$ fås (tangentens skärningspunkt med y–axeln) $y = -n^2$ och $y = 0$ ger (tangentens skärnings-punkt med x–axeln) $x = \dfrac{n^2}{1+2n}$. Arean $a_n = \dfrac{n^4}{2(1+2n)}$.

$\boxed{\textbf{Svar: } a_n = \dfrac{n^4}{2(1+2n)}.}$

8b. Vi har $\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{2(1+2n)}{n^4} = \dfrac{2}{n^4} + \dfrac{4}{n^3}$. Eftersom serierna $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ och $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ är konvergenta så är serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ konvergent.

$\boxed{\textbf{Svar: } \text{serien är konvergent.}}$

---

9. Vid parallellförflyttningen ett steg åt vänster, $x \to x + 1$, övergår kurvan $y = (x-1)\sqrt{2x - x^2}$ på kurvan $y_1 = x\sqrt{1-x^2}$ och linjen $x = 1$ övergår på y–axeln. Vi får samma volym om det nya området roteras kring y–axeln.

Volym $= 2\pi\displaystyle\int_{-1}^{1}|xy_1|\,dx = 2\pi\int_{-1}^{1}x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = \{x = \sin t,\ dx = \cos t\,dt\} = 2\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\sin t\cos t)^2\,dt =$

$= \pi/2\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2 2t\,dt = \pi/4\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-\cos 4t)\,dt = \pi/4\Big[t - \sin 4t/4\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi^2/4.$ $\boxed{\textbf{Svar: } \pi^2/4.}$

---

10. Betrakta funktionen $f(x) = \dfrac{x^4+1}{(x+1)^4}$. Definitionsmängden: $]-\infty,-1[$ och $]-1,\infty[$. Man har $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$, $\displaystyle\lim_{x\to-1} f(x) = \infty$ alltså f har tvåsidiga asymptoter $y = 1$ och $x = -1$.

$f'(x) = \dfrac{4x^3-4}{(x+1)^5} = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f$:s minsta värde $= f(1) = 1/8$. Av detta följer att värdemängden $= [1/8,\infty[$ och att endast värdena $y = 1/8$ och $y = 1$ antas precis en gång.

$\boxed{\textbf{Svar: } a = 1/8 \text{ och } a = 1.}$
