KTH Matematik

Tentamensskrivning, 2008–05–29, kl. 14.00–19.00.

SF1618, Analytiska metoder och linjär algebra 1.

Uppgifterna 1–5 svarar mot varsitt moment i den kontinuerliga examinationen. Av dessa uppgifter skall man bara lösa dem som svarar mot moment man inte blivit godkänd på under kursens gång. Bedömning här är Godkänd/Underkänd. Uppgifterna 6–10 poängsätts med maximalt 4 poäng.

Preliminära betygsgränser
A: godkänt på alla momenten 1–5 och 14–20 poäng på uppgifterna 6–10
B: godkänt på alla momenten 1–5 och 11–13 poäng på uppgifterna 6–10
C: godkänt på alla momenten 1–5 och 8–10 poäng på uppgifterna 6–10
D: godkänt på alla momenten 1–5 och 5–7 poäng på uppgifterna 6–10
E: godkänt på alla momenten 1–5 och 3–4 poäng på uppgifterna 6–10
Fx: underkänt med rätt till skriftlig komplettering
F: underkänt utan rätt till komplettering

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga lösningar och motiveringar. Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv program och grupp tydligt på omslaget. Lycka till!

---

1. Låt

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ och } \boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Undersök om det finns något värde på konstanten a för vilket matrisekvationen

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$$

har precis en lösning.

2. Bestäm en ekvation för det plan som innehåller linjen

$$\boldsymbol{r}(t) = (3 + t, 1 - 2t, -1 + t)$$

och som är parallellt med linjen

$$\boldsymbol{p}(t) = (1 + t, 2 - 6t, 4t).$$

3. Bestäm det största och det minsta värde som antas av funktionen

$$f(x) = (x - 4)\sqrt{x - 1},$$

då $1 \le x \le 5$.

4. Bestäm den allmänna lösningen till ekvationen

$$y'' - 8y' + 16y = 128x + 16 + 5e^{5x}.$$

5. Beräkna arean av det begränsade område som begränsas av kurvorna $y = \dfrac{1}{x-2}$ och $y = \dfrac{9}{x^2}$.

V.g.vänd

6. Beräkna integralen

$$\int_4^9 \frac{1}{(x-1)\sqrt{x}}\,dx. \qquad (4p)$$

7. Ekvationen

$$x^3 - 3xy - y^3 + 3 = 0$$

definierar en funktion $y = y(x)$ sådan att $y(1) = 1$. (4p)

a. Bestäm derivatan $y'(x)$ utryckt i x och y.

b. Visa att $x = 1$ är en kritisk punkt till y.

c. Visa att $x = 1$ är en lokal extrempunkt till y och bestäm dess karaktär.

8. Låt a_n betyda arean av den triangel som tangenten till kurvan $y = x + x^2$ i punkten $(n, n + n^2)$ bildar med koordinataxlarna. (4p)

a. Beräkna a_n.

b. Undersök om serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ är konvergent.

9. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området som begränsas av x–axeln och kurvan $y = (x-1)\sqrt{2x - x^2}$ roterar ett varv kring linjen $x = 1$. (4p)

10. För vilka värden på a har ekvationen

$$\frac{x^4 + 1}{(x+1)^4} = a$$

precis en lösning? (a och x är reella.) (4p)