Lösningsförslag till tentamensskrivningen i SF1618, 5B1132, 5B1140, 2009–06–01.

1. Vi har

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 2 & k & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} r_1 - 2r_4 \\ r_2 - r_4 \\ r_3 - r_4 \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & k-2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \{ \text{ utveckling efter 1:a kolonnen } \} =$$

$$= -\begin{vmatrix} k-2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = k - 5 \neq 0 \iff k \neq 5.$$

Svar: Endast om $k \neq 5$.

---

2. De båda linjernas riktningsvektorer är $\boldsymbol{v}_1 = (1,1,2)$ respektive $\boldsymbol{v}_2 = (2,0,1)$. Därför är vektorn $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = (1,3,-2)$ planets normalvektorn. Punkten $\boldsymbol{r}(0) = (1,2,3)$ ligger i planet. Planets ekvation är

$$\boldsymbol{n} \cdot (x-1, y-2, z-3) = 0 \iff$$

$$1 \cdot (x-1) + 3 \cdot (y-2) - 2 \cdot (z-3) = 0 \iff x + 3y - 2z = 1.$$

Svar: $x + 3y - 2z = 1$.

---

3. Implicit derivering av $4x + x^3y^2 + 3\arcsin(x-2y) + \sqrt[3]{x-y} = 17$ med avseende på x ger

$$4 + 3x^2y^2 + 2x^3yy' + \frac{3(1-2y')}{\sqrt{1-(x-2y)^2}} + \frac{1-y'}{3(x-y)^{2/3}} = 0$$

För $x = 2, y = 1$ får man

$$4 + 12 + 16y'(2) + 3 - 6y'(2) + \frac{1-y'(2)}{3} = 0 \text{ dvs } y'(2) = -2.$$

Tangenten i punkten $(2,1)$ ges av

$$\frac{y-1}{x-2} = y'(2) \iff 2x + y = 5.$$

Normalen i punkten $(2,1)$ ges av

$$\frac{y-1}{x-2} = -\frac{1}{y'(2)} \iff x - 2y = 0.$$

Svar: Tangent $2x + y = 5$, Normal $x - 2y = 0$.

---

4. Karakteristisk ekvation är här $r^2 - 4r + 3 = 0$ vilken har rötterna $r = 1$ och $r = 3$. Följaktligen är $y_h = Ae^x + Be^{3x}$ den allmänna lösningen till $y'' - 4y' + 3y = 0$.

Betrakta ekvationen $y'' - 4y' + 3y = 4e^{3x}$. Ansats $y = axe^{3x}$ ger $y' = (a + 3ax)e^{3x}$, $y'' = (6a + 9ax)e^{3x}$ vilket, insatt i ekvationen, ger $2ae^{3x} = 4e^{3x}$ dvs $a = 2$. Man får alltså partikulärlösningen $y_p = 2xe^{3x}$.

Den allmänna lösningen är $y = y_h + y_p$ dvs

Svar: $y = Ae^x + Be^{3x} + 2xe^{3x}$.

---

5. Vi har

$$\int_0^{\pi/2} \frac{(3+\sin x)\cos x}{2+\sin x}\,dx = \{ \sin x = t,\ \cos x\,dx = dt,\ t: 0 \to 1 \} = \int_0^1 \frac{3+t}{2+t}\,dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{2+t+1}{2+t}\,dt = \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{2+t}\right)dt = \Big[t + \ln|2+t|\Big]_0^1 = 1 + \ln 3 - \ln 2.$$

Svar: $1 + \ln 3 - \ln 2$.

---

6. Betrakta funktionen

$$f(x) = 7 \arcsin 2x - 4 \arccos 2x - \sqrt{1 - 4x^2}.$$

där $-1/2 \leq x \leq 1/2$. Vi söker skärningspunkter mellan grafen till f och x–axeln (en sådan punkt är en lösning till ekvationen). Vi har

$$f'(x) = \frac{14}{\sqrt{1-4x^2}} + \frac{8}{\sqrt{1-4x^2}} + \frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{22+4x}{\sqrt{1-4x^2}}.$$

På intervallet $-1/2 < x < 1/2$ är $f'(x) > 0$ vilket innebär att funktionen är strängt växande. I ändpunkterna på intervallet har vi $f(-1/2) = -15\pi/2 < 0$ och $f(1/2) = 7\pi/2 > 0$. Följaktligen finns det precis en skärningspunkt mellan grafen till f och x–axeln.

Svar: Ekvationen har precis en lösning.

---

7. Vi har

$$\int_{46}^{47} \ln(1 + \sqrt{x-46})\,dx = \{\ 1 + \sqrt{x-46} = t,\ x - 46 = (t-1)^2,\ dx = 2(t-1)\,dt\ \} =$$

$$= \int_1^2 2(t-1)\ln t\,dt = \{\text{ part. int. }\} = \Big[(t-1)^2 \ln t\Big]_1^2 - \int_1^2 \frac{t^2 - 2t + 1}{t}\,dt =$$

$$= \ln 2 - \Big[t^2/2 - 2t + \ln t\Big]_1^2 = \frac{1}{2}.$$

Svar: $\frac{1}{2}$.

---

8. Kurvorna skär varandra då

$$15 + 4\sqrt{1-x} = 15 + 4\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{1-x} = \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow$$

$$1 - x = 1 - x^2 \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \text{ eller } x = 1.$$

På intervallet $0 \leq x \leq 1$ är $15 + 4\sqrt{1-x} \leq 15 + 4\sqrt{1-x^2}$. Volymen ges av

$$2\pi \int_0^1 x\,(4\sqrt{1-x^2} - 4\sqrt{1-x})\,dx = 8\pi \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx - 8\pi \int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx.$$

Man får

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = \{\ \sqrt{1-x^2} = t,\ 1 - x^2 = t^2,\ x\,dx = -t\,dt\ \} =$$

$$= -\int_1^0 t^2\,dt = \frac{1}{3},$$

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx = \{\ \sqrt{1-x} = t,\ x = 1 - t^2,\ dx = -2t\,dt\ \} =$$

$$= -2\int_1^0 (1-t^2)t^2\,dt = \frac{4}{15}$$

alltså volymen är lika med $8\pi(1/3 - 4/15) = 8\pi/15$.

Svar: $\frac{8\pi}{15}$.

---

9. För tillräckligt stora n har vi

$$a_n = \ln\left(\frac{3^n + n^b}{3^n - n^b}\right) = \ln\left(1 + \frac{n^b}{3^n}\right) - \ln\left(1 - \frac{n^b}{3^n}\right) =$$

$$= \{\, n^b/3^n \to 0 \text{ då } n \to \infty \,\} = \frac{n^b}{3^n} + O\left(\frac{n^{2b}}{3^{2n}}\right) + \frac{n^b}{3^n} + O\left(\frac{n^{2b}}{3^{2n}}\right) =$$

$$= \frac{2n^b}{3^n} + O\left(\frac{n^{2b}}{3^{2n}}\right) \le 2 \cdot \frac{2n^b}{3^n} \le 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n .$$

Eftersom den geometriska serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

är konvergent, så konvergerar också serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

---

10. Låt oss räkna på vad som händer när tiden varierar mellan 0 och ett ganska stort antal R timmar. Vi delar in tidsintervallet i n delintervall, på varje sådant delintervall antar vi att påfyllningstakten är ungefär konstant. Så i tidsintervallet mellan t_{j-1} och t_j är påfyllningstakten ungefär konstant $10/(t_j^2 + 4)$ kubikmeter per timme. Om detta intervall är Δ_j timmar långt, så betyder det att det fylls på $\dfrac{10}{t_j^2 + 4}\Delta_j$ kubikmeter under tidsintervallet. Totalt mellan klockan 0 och klockan R fylls det alltså på ungefär $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{10}{t_j^2 + 4}\Delta_j$ kubikmeter. Det här är en Riemannsumma för en kontinuerlig funktion, vid obegränsad förfinad indelning får vi konvergens mot integralen

$$\int_0^R \frac{10}{t^2 + 4}\,dt = 5 \arctan \frac{R}{2}$$

som alltså ger den totala mängden slam som fyllts i tanken fram till klockan R. Om vi låter R gå mot oändligheten ser vi att gränsvärdet blir $5\pi/2$ vilket är mindre än 10. Tanken svämmar alltså inte över.

Svar: Nej.
