Lösningar till tentamen i kurs SF1618 (5B1132, 5B1140) Analytiska metoder och linjär algebra I 100115

Linjär algebra

1. Om A har invers fås $X = A^{-1}B$. Vi söker inversen på sedvanligt sätt enligt algoritmen $\left[A|I\right] \to ... \to \left[I|A^{-1}\right]$. Resultatet är $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -7 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Detta ger

$$X = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -7 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -10 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

2. Kvadratkomplettering ger $(z-(2-i))^2 = -4$.

Låt $z - 2 + i = w = x + iy$ (1). Detta ger systemet $\begin{cases} x^2 - y^2 = -4 & (2) \\ 2xy = 0 & (3) \\ x^2 + y^2 = |w^2| = 4 & (4) \end{cases}$

$(2)+(4) \Rightarrow 2x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \quad (4)-(2) \Rightarrow 2y^2 = 8 \Rightarrow y = \pm 2$. Vi får

$w_1 = 2i$, $w_2 = -2i)$. (1) ger slutligen $\begin{cases} z_1 = 2+i \\ z_2 = 2-3i \end{cases}$

3. Beteckna punkten (-1,0,3) med P och välj en pkt Q på linjen, tex (3,0,-1). Bilda vektorn mellan Q och P: $\overline{u} = (-4,0,4)$. Låt projektionen av denna vektor på linjens riktningsvektor vara $\overline{w} = \dfrac{(-4,0,4)\cdot(2,1,-1)}{\|(2,1,-1)\|^2}(2,1,-1) = -2(2,1,-1)$. Det sökta avståndet ges nu av $\|\overline{u} - \overline{w}\| = \|(0,2,2)\| = \sqrt{8}\,le$.

4. Vi bestämmer först rötterna till ekv $z^6 + 64 = 0$. Ekvationen kan skrivas som $z^6 = -64 = 2^6(\cos\pi + i\sin\pi)$. Ur detta fås de sex rötterna

$z_k = 2(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$, $\theta_k = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi k}{6}$, $k = 0,1,2,3,4,5$. Reella rötter saknas vilket innebär att reella förstagradsfaktorer saknas. Rötterna är parvis komplexkonjugerade (polynomet har ju reella koefficienter):

$z_{0,5} = \sqrt{3} \pm i$, $z_{2,3} = -\sqrt{3} \pm i$, $z_{1,4} = \pm 2i$. Polynomet är produkten av de sex faktorerna $z - z_k$, $k = 0,1,2,3,4,5$. Dessa paras nu ihop så att vi får tre andragradsfaktorer med reella koefficienter:

$(z-z_0)(z-z_5)=(z-\sqrt{3}-i)(z-\sqrt{3}+i)=(z-\sqrt{3})^2+1$

$(z-z_2)(z-z_3)=(z+\sqrt{3}-i)(z+\sqrt{3}+i)=(z+\sqrt{3})^2+1$ Produkten av dessa blir

$(z-z_1)(z-z_4)=(z-2i)(z+2i)=z^2+4$

$x^6+64=(x^2-2\sqrt{3}x+4)((x^2+2\sqrt{3}x+4)(x^2+4)$.

Envariabelanalys

5. Vi använder l'Hospitals regel tre gånger (typen är $\frac{0}{0}$):

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\cos x+x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{3\cos x--x\sin x}=\frac{1}{3}\ .$$

6. $f'(x)=e^{-4x}-4xe^{-4x}=(1-4x)e^{-4x}=0\Rightarrow x=\frac{1}{4}$ som är en kritisk punkt. Ändpunkt är $x=0$. Singulära punkter saknas. Vi ser att derivatan är positiv mellan $x=0$ och $x=¼$ och negativ för större x – värden. Förstaderivatatestet ger då att $x=0$ är en lokal minpunkt och att $x=¼$ är en lokal maxpunkt med $f(1/4)=1/4e$. Då funktionen är kontinuerlig och $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ fås värdemängden $\left[0,\frac{1}{4e}\right]$.

7. $\int\frac{x}{(1-x)^3}dx=\begin{Bmatrix}u=1-x\\du=-dx\end{Bmatrix}-\int\frac{1-u}{u^3}du=\int(\frac{1}{u^2}-\frac{1}{u^3})du=-\frac{1}{u}+\frac{1}{2u^2}+C=\frac{2x-1}{2(x-1)^2}+C$.

8. Homogena problemets karakteristiska ekvation är $r^2-2r+4=0\Rightarrow r=1\pm i\sqrt{3}$. Det ger $y_h(x)=e^x.(A\cos\sqrt{3}x+B\sin\sqrt{3}x)$ Vi ansätter som partikulärlösning:

$y_p(x)=a\cos x+b\sin x\Rightarrow y_p{}'(x)=-a\sin x+b\cos x\Rightarrow y_p{}''(x)=-a\cos x-b\sin x$.

Insättning i differentialkvationen ger:

$(3a-2b)\cos x+(2a+3b)\sin x=13\sin x\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=3\end{cases}\Rightarrow y_p(x)=2\cos x+3\sin x$ och den allmänna lösningen är $y(x)=y_h(x)+y_p(x)=e^x(A\cos\sqrt{3}.x+B\sin\sqrt{3}x)+2\cos x+3\sin x$.

$y(0)=0\Rightarrow A+2=0\Rightarrow A=-2$ vilket ger

$y(x)=e^x(-2\cos\sqrt{3}x+B\sin\sqrt{3}x)+2\cos x+3\sin x\Rightarrow$

$y'(x)=e^x((B\sqrt{3}-2)\cos\sqrt{3}x+(B+2\sqrt{3})\sin\sqrt{3}x)-2\sin x+3\cos x$. $y'(0)=0$ ger nu

$y'(0)=0\Rightarrow B\sqrt{3}+1=0\Rightarrow B=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Slutligen fås resultatet $y(x)=-e^x(2\cos\sqrt{3}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}x)+2\cos x+3\sin x$.

9. Vi söker längden av kurvbågen. Den ges av $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+(y')^2}\,dx$. Enligt integralkalkylens fundamentalsats gäller $y' = \sqrt{\cos^4(x)\sin^2(x) - 1}$ vilket ger $1+(y')^2 = \cos^4(x)\sin^2(x)$. Kurvbågens längd är alltså $\int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\sin(x)dx = \left[-\frac{1}{3}\cos^3(x)\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}\ le$. Det tar alltså 1/3 sekund för myran att passera kurvbågen.

10. Serien är absolutkonvergent om $\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{\cos n\pi}{n\ln n}\right|$ är konvergent. $\cos n\pi = (-1)^n$ och $\ln n > 0$, $n \geq 2$ ger $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$. För studiet av denna serie använder vi integral-kriteriet: $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x} = \left\{\begin{matrix} t = \ln x \\ dt = \dfrac{dx}{x}\end{matrix}\right\} = \int_{\ln 2}^{\infty}\frac{dt}{t} = \lim_{R\to\infty}\int_{\ln 2}^{R}\frac{dt}{t} = \lim_{R\to\infty}(\ln R - \ln(\ln 2) = \infty$. Då är även serien $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ divergent dvs den givna serien är inte absolutkonvergent. Är den betingat konvergent? Vi använder Leibniz´sats om alternerande serier. Vår serie kan ju skrivas $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$. Låt $a_n = \frac{1}{n\ln n}$:

1. $a_n \geq 0$, $n \geq 2$
2. $a_{n+1} \leq a_n$, $n \geq 2$
3. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

2. och 3. gäller eftersom $\ln x$ är en växande funktion. Enligt satsen är då den givna serien konvergent. Den måste då vara betingat konvergent enligt ovan.