

**Lösningar till tentamen i kurs SF1618(5B1132, 5B1140) Analytiska metoder och linjär algebra I 100826**

**Linjär algebra**

1.  $\det C^T = \det C = \det A^{-1} \det B^2 = \frac{1}{\det A} \cdot (\det B)^2 \Rightarrow \det A = \frac{(\det B)^2}{\det C} = 9.$

2. Vi visar att systemet som bildas av de tre ekvationerna har oändligt många lösningar vilka ges av en parameter:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & -7 \\ 0 & -4 & 2 & -14 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Detta ger lösningar}$$

$z = t, \quad y = \frac{7}{2} + \frac{t}{2}, \quad x = -2 - t$  dvs parameterekv för en linje med riktningsvektor (-2,1,2)

3. Vi ser att  $z = 1$  är en rot. Division med  $z - 1$  ger faktorn  $z^2 - iz + 1 + 3i$ . Vi löser nu ekv  $z^2 - iz + 1 + 3i = 0$ . Kvadratkomplettering ger  $(z - \frac{i}{2})^2 = -\frac{5}{4} - 3i$ . Med  $z - \frac{i}{2} = x + iy$  (1)

$$\text{fås } \begin{cases} x^2 - y^2 = -\frac{5}{4} & (2) \\ 2xy = -3 & (3) \\ x^2 + y^2 = \frac{13}{4} & (4) \end{cases} \quad (x^2 + y^2 = \left| -\frac{5}{4} - 3i \right|) \quad (2)+(4) \text{ ger } 2x^2 = \frac{8}{4} \Rightarrow x = \pm 1. \text{ Det ger}$$

enligt (3):  $y = \mp \frac{3}{2}$ . (1) ger  $z_1 = 1 - \frac{3}{2}i + \frac{i}{2} = 1 - i, z_2 = -1 + \frac{3}{2}i + \frac{i}{2} = -1 + 2i$ . Rötterna är alltså  $z = 1, 1 - i, -1 + 2i$ .

4. Låt  $ABA^{-1} = C$ . Då gäller att  $C^{-1} = (ABA^{-1})^{-1} = AB^{-1}A^{-1}$ . Inversen till  $C$  beräknas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Det betyder att}$$

$$AB^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Envariabelanalys

5. Funktionen är kontinuerlig på det slutna och begränsade intervallet. Det säkerställer att  $f$  antar ett största och ett minsta värde där vilket måste ske i en kritisk punkt, i en singular punkt eller i en av intervallets ändpunkter.  $f'(x) = \sqrt{x-1} + \frac{x-4}{2\sqrt{x-1}} = \frac{3x-6}{2\sqrt{x-1}} = 0$  ger den enda kritiska punkten  $x = 2$  och den enda singulara punkten  $x = 1$ . Vi jämför nu funktionens värden i de tre intressanta punkterna:  $f(2) = -2$ ,  $f(1) = 0$ ,  $f(5) = 2$ . Det minsta värdet är alltså  $-2$  och det största är  $2$ .

6. Det homogena problemet har karakteristisk ekv  $r^2 - 6r + 9 = 0 \Rightarrow r = 3, 3$ . Den allmänna lösningen till den homogena ekv är då  $y_h(x) = (Ax + B)e^{3x}$ . Som partikulärlösning antar vi  $y_p(x) = (ax + b)e^{2x} \Rightarrow y_p'(x) = (2ax + a + 2b)e^{2x} \Rightarrow y_p''(x) = 4(ax + a + b)e^{2x}$ . Insättning i differkvationen ger:

$$[4(ax + a + b) - 6(2ax + a + 2b) + 9(ax + b)]e^{2x} = xe^{2x} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}.$$

Det ger  $y_p(x) = (x + 2)e^{2x} \Rightarrow y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (Ax + B)e^{3x} + (x + 2)e^{2x}$ .

7. Vi partialbråksuppdelar funktionen och väljer sedan integrationskonstanten till 0:

$$\frac{2-3x}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} = \frac{(A+C)x^3 + (B+D)x^2 + Ax + B}{x^2(x^2+1)} \Rightarrow \begin{cases} A = -3 \\ B = 2 \\ C = 3 \\ D = -2 \end{cases}$$

$$\int \frac{2-3x}{x^2(x^2+1)} dx = \int \left( -\frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3x}{x^2+1} - \frac{2}{x^2+1} \right) dx =$$

$$= -3 \ln|x| - \frac{2}{x} + \frac{3}{2} \ln(x^2+1) - 2 \arctan x$$

8. Taylorpolynomet ges av  $P_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2$ . För att

bestämma derivatorna deriverar vi implicit map  $x$  två gånger:

$$\begin{cases} 2x + y + xy' + 2yy' - 1 + 2y' = 0 & (1) \\ 2 + y' + y' + xy'' + 2(y'^2 + yy'') + 2y'' = 0 & (2) \end{cases} \quad \text{Insättning av punkten ger } y' = 0$$

ur (1) som i (2) ger  $y'' = -2$  och vi får  $P_2(x) = -1 - (x-1)^2$ .

9. Volymen ges av

$$\begin{aligned} \pi \int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx &= \left. \begin{matrix} x = 2 \sin u \\ dx = 2 \cos u du \end{matrix} \right\} = 16\pi \int_0^{\pi/2} \sin^2 u \sqrt{1-\sin^2 u} \cos u du = \\ &= 16\pi \int_0^{\pi/2} \sin^2 u \cos^2 u du = 4\pi \int_0^{\pi/2} \sin^2 2u du = 2\pi \int_0^{\pi/2} (1-\cos 4u) du = \\ &= 2\pi \left[ u - \frac{\sin 4u}{4} \right]_0^{\pi/2} = \pi^2 \text{ ve.} \end{aligned}$$

10. Serien kan skrivas:  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n n(n-1)}$  (1). Eftersom den andra av dessa

positiva serier är  $< \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ , som är en konvergent geometrisk serie (kvoten är  $\frac{1}{2}$ ), fås att den givna serien är konvergent enligt majorantsatsen (Comparison Test).

Den första serien i (1) har (geometrisk serie) summan  $\frac{1/4}{1-1/2} = \frac{1}{2}$ . Den andra

serien kan skrivas  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1/2)^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1/2)^n}{n}$  (2). Vi använder

nu att  $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ ,  $|x| < 1$ . HL i (2) skrivs på följande sätt: Låt  $m = n-1$

i den första serien. Vi får då

$$\frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1/2)^m}{m} - \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1/2)^n}{n} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \left( -\ln \frac{1}{2} \right) - \left( -\ln \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} (1 - \ln 2). \text{ Detta är alltså}$$

summan av serien VL i (2). Den givna seriens summa är då enligt (1):

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} (1 - \ln 2) = \frac{\ln 2}{2}.$$