Lösningar till tentamen i kurs SF1618(5B1132,5B1140) Analytiska metoder och Linjär algebra I 110113.

Linjär algebra

1. $AB^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 2 & a \\ a & a & 0 \end{bmatrix}$. Determinanten beräknas:

   $\begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 2 & a \\ a & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ a & a & 0 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{vmatrix} = 0$. Det betyder att matrisen saknar invers för varje värde på a.

2. Låt punkterna betecknas A, B resp C. Vi bildar vektorerna från A till B resp från A till C: $(1,1,2)-(2,0,-1)=(-1,1,3)$ och $(3,1,-2)-(2,0,-1)=(1,1,-1)$.

   En normalvektor till planet ges då av $(-1,1,3)\times(1,1,-1) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-4,2,-2)$.

   Vi väljer $\bar{n}=(2,-1,1)$. Det ger planets ekvation: $2x-y+z=K$. Insättning av valfri punkt ger $K=3$. Vinkeln θ mellan planets normalvektor och linjen fås ur skalärprodukten mellan $\bar{n}$ och linjens riktningsvektor $\bar{v}=(1,1,2)$:

   $\bar{n}\cdot\bar{v} = \begin{cases} (2,-1,1)\cdot(1,1,2) = 2-1+2=3 \\ \|\bar{n}\|\|\bar{v}\|\cos\theta = \sqrt{6}\sqrt{6}\cos\theta = 6\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{3}$. Vinkeln mellan planet och linjen är då $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}$.

3. Vi ser att $z=1$ är en rot. Division med $z-1$ ger faktorn $z^2-(2+3i)z-1+3i$. Vi söker nollställena till detta polynom. Kvadratkomplettering ger

   $(z-\dfrac{2+3i}{2})^2-(\dfrac{2+3i}{2})^2-1+3i=0 \Rightarrow (z-\dfrac{2+3i}{2})^2 = -\dfrac{1}{4}$.

   $w = z-\dfrac{2+3i}{2} = x+iy \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2 = -\dfrac{1}{4} & (1) \\ 2xy = 0 & (2) \end{cases}$

   Ur detta system fås $x=0$ ($y=0$ går ej enligt (1) eftersom x är reellt). (1) ger då att

   $y=\pm\dfrac{1}{2} \Rightarrow w = \pm\dfrac{i}{2}$. Detta ger slutligen $\begin{cases} z_1 = \dfrac{2+3i}{2}+\dfrac{i}{2} = 1+2i \\ z_2 = \dfrac{2+3i}{2}-\dfrac{i}{2} = 1+i \end{cases}$. De tre rötterna är alltså $z=1,1+i,1+2i$.

4. Planets normalvektor (2,1,-1) är riktningsvektor för normallinjen L genom P och Q. Normallinjens vektorekv är då $(x,y,z)=(3,1,-1)+t(2,1,-1)$, $-\infty<t<+\infty$. Att L skär planet i Q ger då $2(3+2t)+1+t+1+t=6 \Rightarrow t=-\frac{1}{3}$. Insättning i linjens vektorekv ger $(x,y,z)=(\frac{7}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$ som alltså är koordinaterna för Q. Det sökta avståndet ges då av längden av vektorn mellan P och Q dvs av $\left\|(3,1,-1)-(\frac{7}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3})\right\|=\left\|(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3})\right\|=\frac{\sqrt{6}}{3}$ *le*.

Envariabelanalys

5. Implicit derivering ger $\frac{1}{2\sqrt{3x+y}}(3+y')+2x+4yy'=0$. Insättning av punkten (0,1) ger $\frac{1}{2}(3+y')+4y'=0 \Rightarrow y'(0)=-\frac{1}{3}$. Tangentlinjens ekvation blir alltså $y-1=-\frac{1}{3}(x-0) \Rightarrow y=-\frac{1}{3}x+1$.

6. Lokala extremvärden kan finnas i kritiska punkter, ändpunkter eller singulära punkter. $f'(x)=\frac{x^2-3x-(x+1)(2x-3)}{x^2(x-3)^2}=-\frac{x^2+2x-3}{x^2(x-3)^2}$. Vi ser att singulära punkter saknas. Kritiska punkter fås ur $x^2+2x-3=0 \Rightarrow x=1,-3$. Det ger att $x=1$ är kritisk punkt. Ändpunkter är $x=\frac{1}{2}$ och $x=2$. Teckenstudium av $f'(x)$ ger att tecknet är positivt mellan $x=\frac{1}{2}$ och $x=1$ och negativt mellan $x=1$ och 2. Det ger enligt förstaderivatatestet att f har lokala minima i ändpunkterna och lokalt maximum i $x=1$.

7. $$\int_e^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^2}=\lim_{R\to\infty}\int_e^{R}\frac{dx}{x(\ln x)^2}=\begin{Bmatrix} u=\ln x \\ du=\frac{dx}{x}\end{Bmatrix}=\lim_{R\to\infty}\int_1^{\ln R}\frac{du}{u^2}=\lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{u}\right]_1^{\ln R}=1-\lim_{R\to\infty}\frac{1}{\ln R}=1.$$

8. Vi partialbråksuppdelar integranden: $\dfrac{1}{(1+x)^2(1+x^2)} = \dfrac{A}{(1+x)} + \dfrac{B}{(1+x)^2} + \dfrac{Cx+D}{1+x^2}$.

Multiplikation med $(1+x)^2(1+x^2)$ och förenkling ger

$(A+C)x^3 + (A+B+2C+D)x^2 + (A+C+2D)x + A+B+D = 1$. Identifikation ger

$$\begin{cases} A+ \quad C \quad = 0 \\ A+B+2C+ \ D = 0 \\ A+ \quad C+2D = 0 \\ A+B+ \quad D = 1 \end{cases} \Rightarrow A = B = \frac{1}{2} \ , \ C = -\frac{1}{2} \ , \ D = 0 .$$ Integralen kan då skrivas som

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \left[\frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{x}{1+x^2}\right]dx = \frac{1}{2}\left[\ln|1+x| - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}(\ln 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 + 1) =$$

$$= \frac{1}{4}(\ln 2 + 1) .$$

9. Den homogena ekvationens karakteristiska ekvation är $r^2 + 3r + 2 = 0 \Rightarrow r = -2, -1$.

Den allmänna lösningen till den homogena ekvationen är då $y_h(x) = Ae^{-2x} + Be^{-x}$.

Vi har ”resonans” och ansätter därför som partikulärlösning $y_p(x) = x(ax+b)e^{-x}$.

Detta ger

$y_p'(x) = (-ax^2 + (2a-b)x + b)e^{-x} \Rightarrow$

$y_p''(x) = (ax^2 + (-4a+b)x + +2(a-b))e^{-x}$.

Insättning i differentialekvationen ger efter förkortning med e^{-x} :

$ax^2 + (b-4a)x + 2(a-b) + 3(-ax^2 + (2a-b)x + b) + 2(ax^2 + bx) = x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a \quad = 1 \\ 2a+b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \ , \ b = -1 .$$

Den allmänna lösningen till differentialekvationen är då

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{-2x} + Be^{-x} + x(\frac{1}{2}x - 1)e^{-x} .$$

10. Låt trådens högra fästpunkt vara (a,b) . Trådens längd är $\int_0^a \sqrt{1+(y')^2}\,dx = 1$. Trådens lutning ges av $y' = \sqrt{e^{2x}-1} \Rightarrow \sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{e^{2x}} = e^x$. Vi får då ekvationen

$1 = \int_0^a e^x dx = \left[e^x\right]_0^a = e^a - 1 \Rightarrow a = \ln 2$. $y-$koordinaten för trådens högra fästpunkt fås:

$$b = y(a) = y(\ln 2) - y(0) = \int_0^{\ln 2} y'(x)dx = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^{2x}-1}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \sqrt{e^{2x}-1} \\ dx = \dfrac{u}{1+u^2}du \end{array} \right\} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{u^2}{1+u^2}du =$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} (1 - \frac{1}{1+u^2})du = \left[u - \arctan u\right]_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \arctan\sqrt{3} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\ .$$

Trådens högra fästpunkt har alltså koordinaterna $(\ln 2, \sqrt{3} - \frac{\pi}{3})$.