

Lösningar till tentamen i kurs SF1618(5B1132,5B1140) Analytiska metoder och linjär algebra I 110825.

Linjär algebra

$$1. \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 9 & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 3 & a-6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a-5 \end{bmatrix}$$

Systemet är lösbart endast om $a = 5$. Då fås oändligt många lösningar

$$z = t \text{ ger } y = \frac{1+3t}{4} \Rightarrow x = \frac{3-7t}{4} .$$

$$2. \text{ Kvadratkomplettering ger } (z - \frac{i}{2})^2 - \frac{i^2}{4} + 1 + 3i = 0 \Rightarrow (z - \frac{i}{2})^2 = -\frac{5}{4} - 3i . \text{ Vi inför nu}$$

$$w = z - \frac{i}{2} = a + ib \Rightarrow \operatorname{Re} w^2 = a^2 - b^2 = -\frac{5}{4} , \operatorname{Im} w^2 = 2ab = -3 , |w^2| = a^2 + b^2 = \sqrt{\frac{25}{16} + 9} = \frac{13}{4} .$$

$$\text{Vi får systemet } \begin{cases} a^2 - b^2 = -\frac{5}{4} & (1) & (1) + (3) \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \\ 2ab = -3 & (2) & (3) - (1) \Rightarrow b^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow b = \pm \frac{3}{2} . \\ a^2 + b^2 = \frac{13}{4} & (3) & (2) \Rightarrow ab < 0 \end{cases}$$

Detta ger

$$w_1 = 1 - \frac{3}{2}i , w_2 = -1 + \frac{3}{2}i \Rightarrow z_1 = 1 - \frac{3}{2}i + \frac{i}{2} = 1 - i , z_2 = -1 + \frac{3}{2}i + \frac{i}{2} = -1 + 2i .$$

$$3. \text{ Vi opererar med } A^{-1} \text{ från höger och } B^{-1} \text{ från vänster och får } X = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1} . \text{ Vi}$$

$$\text{beräknar produktmatrisen och får } AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 7 \\ 2 & 7 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} . \text{ Dess invers beräknas:}$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 17 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \\ & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 2 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 20 & -14 & -49 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 5 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -7 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Matrisen till höger om enhetsmatrisen är vår sökta X .

4. Vi söker skärningslinjens ekv:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 & -5 \\ 0 & -4 & 9 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{4} & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow (x, y, z) = (1, -2, 0) + t(1, 9, 4).$$

Låt $P(1,1,1)$ och $Q(1,-2,0)$. Bilda nu vektorn från Q till $P : (0,3,1)$. En normalvektor till planet fås om vi bildar kryssprodukten mellan denna vektor och en riktningvektor till linjen

$$\text{t ex } (1,9,4) : (0,3,1) \times (1,9,4) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 9 & 4 \end{vmatrix} = (3,1,-3). \text{ Det sökta planets ekvation ges då av}$$

$3x + y - 3z = C$. Insättning av t ex punkten Q ger $C = 1$.

Envariabelanalys

5. Gränsvärdet är av typen $\frac{0}{0}$ och upprepad användning av l'Hospitals regel (samma typ fås

$$\text{i varje steg) ger } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - 2 \cos 2x}{2e^x - 2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin x + 4 \sin 2x}{2e^x - 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos x + 8 \cos 2x}{2e^x} = 3.$$

6. Vi använder substitution följt av partiell integration :

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x} \cos \sqrt{x} dx &= \left. \begin{matrix} u = \sqrt{x} \\ 2udu = dx \end{matrix} \right\} = 2 \int u^2 \cos u du = \{ \text{partiellt} \} = 2(u^2 \sin u - 2 \int u \sin u du) = \\ &= 2u^2 \sin u - 4(-u \cos u + \int \cos u du) = 2u^2 \sin u + 4u \cos u - 4 \sin u + C = \\ &= (2x - 4) \sin \sqrt{x} + 4\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

7. Implicit derivering ger $(1 + y')e^{xy} + (x + y)e^{xy}(y + xy') = 0$. Ur den givna ekvationen fås genom insättning av $x = 0$ att $y(0) = 1$ vilket ger $1 + y'(0) + 1 = 0 \Rightarrow y'(0) = -2$.

8. Den homogena ekvationens karakteristiska ekvation är $r^2 - 8r + 16 = 0 \Rightarrow r = 4, 4$.

Den allmänna lösningen till den homogena ekvationen är då $y_h(x) = (Ax + B)e^{4x}$.

Vi har "resonans" och ansätter därför som partikulärlösning $y_p(x) = x^2(ax + b)e^{4x}$.

Detta ger

$$y_p'(x) = (4ax^3 + (3a + 4b)x^2 + 2bx)e^{4x} \Rightarrow$$

$$y_p''(x) = (16ax^3 + (24a + 16b)x^2 + (6a + 16b)x + 2b)e^{4x}.$$

Insättning i differentialekvationen ger efter förkortning med e^{4x} :

$$-16bx^2 + 6ax = x \Rightarrow a = \frac{1}{6}, b = 0 \Rightarrow y_p(x) = \frac{1}{6}x^3e^{4x}.$$

Den allmänna lösningen till differentialekvationen är då

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (Ax + B + \frac{1}{6}x^3)e^{4x}. \quad y(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'(x) = (A + \frac{1}{2}x^2 + 4Ax + \frac{2}{3}x^3)e^{4x} \Rightarrow y'(0) = A = 1.$$

Den sökta lösningen är alltså $y(x) = (x + \frac{1}{6}x^3)e^{4x}$.

9. f är definierad för $x \geq 0$. $f'(x) = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{1+x} = \frac{1-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(1+x)} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$ är den

enda kritiska punkten. Då derivatan är positiv till vänster och negativ till höger om denna punkt är den en lokal maxpunkt. Ändpunkt (och singular) är $x = 0$. Eftersom derivatan är positiv till höger om denna punkt är den en lokal minpunkt.

10.

$$\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{x^3} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{\arctan x}{x^3} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(-\frac{\arctan x}{2x^2} \Big|_1^R + \frac{1}{2} \int_1^R \frac{dx}{x^2(1+x^2)} \right) = -\frac{1}{2} \left(0 - \frac{\pi}{4} \right) + \lim_{R \rightarrow \infty} I_1.$$

För att beräkna integralen I_1 partialbråksuppdelar vi integranden:

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{1+x^2} = \{symm \Rightarrow A = C = 0\} = \frac{B}{x^2} + \frac{D}{1+x^2} \Rightarrow B(1+x^2) + Dx^2 = 1.$$

Det ger omedelbart $B = 1$ och $D = -1$ ur vilket fås:

$$\frac{1}{2} \int_1^R \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{x} - \arctan x \right]_1^R = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{R} - \arctan R \right). \quad \text{Den generaliserade}$$

integralens värde är då $\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{R} - \arctan R \right) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2}$.

