

Lösningar till tentamen i kurs SF1618(5B1132, 5B1140) Analytiska metoder och linjär algebra I 120822.

Linjär algebra

1. Om A har invers fås $X = B^T A^{-1}$. Vi söker inversen på sedvanligt sätt enligt

algoritmen $[A|I] \rightarrow \dots \rightarrow [I|A^{-1}]$. Resultatet är $A^{-1} = \begin{bmatrix} 49 & -16 & -19 \\ 3 & -1 & -1 \\ -18 & 6 & 7 \end{bmatrix}$. Detta ger

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 49 & -16 & -19 \\ 3 & -1 & -1 \\ -18 & 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & 5 & 6 \\ 43 & -14 & -17 \end{bmatrix}$$

2. Kvadratkomplettering ger $(z - \frac{3}{2}(1+i))^2 = 2 - \frac{3}{2}i$.

Låt $z - \frac{3}{2}(1+i) = w = x + iy$ (1). Detta ger systemet
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 & (2) \\ 2xy = -\frac{3}{2} & (3) \\ x^2 + y^2 = |w^2| = \frac{5}{2} & (4) \end{cases}$$

$$(2) + (4) \Rightarrow 2x^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{3}{2} \quad (4) - (2) \Rightarrow 2y^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \pm \frac{1}{2}. \quad (3) \text{ ger att } x \text{ och } y$$

har olika tecken dvs $w_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$, $w_2 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$. (1) ger slutligen $\begin{cases} z_1 = 3 + i \\ z_2 = 2i \end{cases}$

3. Kalla punkterna A , B resp C och bilda vektorerna mellan A och B resp mellan A och C : $\vec{u} = (3, -1, 1)$ och $\vec{v} = (2, 0, 2)$. En normalvektor till planet ges då av

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (3, -1, 1) \times (2, 0, 2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-2, -4, 2). \text{ Vi väljer } \vec{n} = (1, 2, -1).$$

Planets ekvation är då $x + 2y - z = D$. Insättning av tex punkten A ger $D = 4$ dvs planets ekv är $x + 2y - z = 4$. Linjens riktningsvektor $(3, 1, b)$ är ortogonal mot \vec{n} . Det ger $(1, 2, -1) \cdot (3, 1, b) = 0 \Rightarrow b = 5$. Punkten $(a, 1, -1)$ på linjen ligger i planet. Det ger $a + 2 + 1 = 4 \Rightarrow a = 1$.

4. Skärningslinjen fås ur systemet

$$\begin{cases} x + y - z = -1 \\ y + z = 2 \end{cases}. \quad z = t \Rightarrow y = 2 - t \Rightarrow x = -3 + 2t. \text{ Skärningslinjens ekv på parameter-}$$

form är alltså $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}$. Låt P vara punkten $(1,1,1)$ och Q punkten $(-3,2,0)$ på

skärningslinjen. Vi bildar vektorn $\bar{u} = (4,-2,1)$ från Q till P . Denna vektor projiceras ortogonalt på skärningsvektorns riktningsvektor $\bar{v} = (2,-1,1)$. Det ger vektorn

$$\bar{w} = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\|\bar{v}\|^2} \bar{v} = \frac{11}{6} (2,-1,1). \text{ Det sökta avståndet ges nu av}$$

$$\|\bar{u} - \bar{w}\| = \frac{1}{6} \|(2,-1,-5)\| = \frac{\sqrt{30}}{6} \text{le}.$$

Envariabelanalys

5. Vi använder l'Hospitals regel två gånger (typen är $\frac{0}{0}$):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(x+1)}{e^x - x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1+x)^2} = 1.$$

6.
$$\int_0^1 \frac{dx}{(\sqrt{x}+1)^2} = \left\{ \begin{array}{l} u = \sqrt{x} + 1 \\ dx = 2(u-1)du \end{array} \right\} = 2 \int_1^2 \frac{u-1}{u^2} du = 2 \int_1^2 \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2} \right) du = 2 \left[\ln|u| + \frac{1}{u} \right]_1^2 = 2 \ln 2 - 1.$$

7. Vi ser att $D(f)$ ges av $x \geq 0$. Vi söker funktionens minsta värde. Det kommer att antas i en kritisk punkt eftersom $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ och $f(0) = 0$.

$$f'(x) = 2x\sqrt{3x} + (x^2 - 5) \cdot \frac{3}{2\sqrt{3x}} = \frac{15(x^2 - 1)}{2\sqrt{3x}} = 0 \Rightarrow x = 1. \text{ Vi ser att } f'(x) \text{ är}$$

negativ till vänster om den kritiska punkten och positiv till höger. Det ger ett minimum för $x = 1$. Vi får $f(1) = -4\sqrt{3} > -8$ dvs det finns inget x så att $f(x) = -8$.

8. Homogena problemets karakteristiska ekvation är $r^2 - 5r + 4r = 0 \Rightarrow r = 1, 4$. Det ger $y_h(x) = Ae^x + Be^{4x}$. Vi har "resonans" och ansätter därför

$$y_p(x) = axe^x \Rightarrow y_p'(x) = a(x+1)e^x \Rightarrow y_p''(x) = a(x+2)e^x. \text{ Insättning i diffekvationen}$$

$$\text{ger } ae^x [x + 2 - 5(x+1) + 4x] = 8e^x \Rightarrow a = -\frac{8}{3} \Rightarrow y_p(x) = -\frac{8}{3}xe^x \text{ och den allmänna}$$

$$\text{lösningen är } y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \left(A - \frac{8}{3}x\right)e^x + Be^{4x}. \quad y(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0. \text{ Det ger}$$

$$y(x) = \left(A - \frac{8}{3}x\right)e^x - Ae^{4x} \Rightarrow y'(x) = -\frac{8}{3}e^x + \left(A - \frac{8}{3}x\right)e^x - 4Ae^{4x}. \quad y'(0) = 0 \text{ ger nu}$$

$$-\frac{8}{3} - 3A = 0 \Rightarrow A = -\frac{8}{9} \Rightarrow B = \frac{8}{9} \Rightarrow y(x) = \frac{8}{9} \left[e^{4x} - (3x+1)e^x \right].$$

9. Implicit derivering map x ger $3x^2 - 3y - 3xy' - 3y^2y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{x^2 - y}{x + y^2}$. Vi ser att

$f'(1) = 0$ dvs $x = 1$ är en kritisk punkt till f . Vi använder 2:a derivatatestet för att avgöra punktens karaktär och deriverar implicit en gång till:

$$y'' = \frac{(2x - y')(x + y^2) - (x^2 - y)(1 + 2yy')}{(x + y^2)^2}. \quad x = y = 1, \quad y' = 0 \Rightarrow f''(1) = 1 > 0. \text{ Det}$$

ger att $x = 1$ är en lokal minpunkt.

10. Serien är positiv. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \sqrt{n+3}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ som är en geometrisk serie med kvoten

$r = \frac{1}{3}$. Eftersom $|r| < 1$ är den konvergent. Den givna serien är då konvergent enligt majorantprincipen (Comparison Test).