Institutionen för Matematik
KTH

Tentamen i Analytiska metoder och linjär algebra 2
för M, BD, P och T (kurskod 5B1133) samt IT (kurskod 5B1141)
Den 15 januari 2005 kl 14.00-19.00

Uppgifterna 1-5 svarar mot varsitt moment i den kontinuerliga examinationen. Av dessa uppgifter ska ni bara lösa dem som svarar mot moment ni inte blivit godkända på under kursens gång. Bedömningen här är Godkänd/Underkänd.

Uppgifterna 6-10 poängsätts med maximalt 4 poäng per uppgift. Betygsgränser:
För betyg 3 krävs godkänt på moment 1-5 plus 3 poäng totalt på uppgifterna 6-10.
För betyg 4 krävs godkänt på moment 1-5 plus 7 poäng totalt på uppgifterna 6-10.
För betyg 5 krävs godkänt på moment 1-5 plus 12 poäng totalt på uppgifterna 6-10.
Utförliga motiveringar krävs. Inga hjälpmedel. Skriv program och grupp tydligt på omslaget. Lycka till!

1. Finn en bas för $\mathbf{R}^2$ där samtliga basvektorer är egenvektorer till matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ (standardkoordinater).

Lösning: Kalla den givna matrisen för A. Den karaktäristiska ekvationen för A är $(1-c)(9-c)-9=0$ med lösningar $c=0$ och $c=10$, som alltså är egenvärdena till matrisen A. Egenvektorer som hör till egenvärdet 0 fås som lösningar $\mathbf{v}$ till ekvationen $A\mathbf{v}=\mathbf{0}$, dvs $\mathbf{v}=t\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Egenvektorer som hör till egenvärdet 10 fås som lösningar till $\begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{v}=\mathbf{0}$,dvs $\mathbf{v}=t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Vi ser att $\{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\}$ är en bas för $\mathbf{R}^2$ som består av egenvektorer till A.

2. Låt $f(x,y)=y^4e^{x^2-1}+1$. Bestäm tangenplanet i punkten $(x_0,y_0,z_0)=(1,-1,2)$ till ytan $z=f(x,y)$.

Lösning: Vi deriverar och får $\frac{\partial f}{\partial x}=2xy^4e^{x^2-1}$ och $\frac{\partial f}{\partial y}=4y^3e^{x^2-1}$. I den aktuella punkten är alltså $\frac{\partial f}{\partial x}=2$ och $\frac{\partial f}{\partial y}=-4$, varför tangentplanet ges av ekvationen $z=2+2(x-1)-4(y+1)$.

3. Avgör om funktionen $\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x^2} - x\cos y + xy \\ \ln(xy+1) - \arctan y \end{pmatrix}$ är inverterbar i någon omgivning av origo.

Lösning: Vi deriverar och får jacobimatrisen

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} 2xe^{x^2} - \cos y + y & -x\sin y + x \\ \dfrac{y}{xy+1} & \dfrac{x}{xy+1} - \dfrac{1}{1+y^2} \end{pmatrix}$$

Vi ser sedan att när vi sätter in $(x,y) = (0,0)$ får vi

$$J_F(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

vars determinant är $1 \neq 0$, varför inversa funktionssatsen garanterar existensen av en lokal invers.

4. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma (x^2+y^2)\,dx + (2xy+y^2)\,dy$, där γ är den del av parabelkurvan $y = 1-x^2$ som ligger i första kvadranten, genomlöpt en gång med start i $(1,0)$ och slut i $(0,1)$.

Lösning: Vi ser att $\dfrac{\partial(2xy+y^2)}{\partial x} = 2y = \dfrac{\partial(x^2+y^2)}{\partial y}$, för alla x, y, så differentialformen är exakt och kurvintegralen alltså oberoende av vägen. Vi kan då (till exempel) byta väg och integrera längs axlarna istället, dvs först från $(1,0)$ till origo och sedan från origo till $(0,1)$. Gör vi detta så får vi

$$\int_\gamma (x^2+y^2)\,dx + (2xy+y^2)\,dy = \int_1^0 x^2\,dx + \int_0^1 y^2\,dy = 0.$$

5. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (x,y,0)$ ut ur det område K som ges av olikheterna $x^2+y^2 \leq z \leq 4$.

Lösning: Begränsningsytan till K består av två ytstycken. Det första, låt oss kalla det för Y_1, ges av $z = 4$, $x^2+y^2 \leq 4$. Det andra, låt oss kalla det för Y_2, ges av $z = x^2+y^2$, $x^2+y^2 \leq 4$.

På Y_1 har vi den utåtriktade normalen $N = (0,0,1)$ så flödet genom Y_1 blir

$$\int_{Y_1} (x,y,0)\cdot(0,0,1)\,dS = \int_{Y_1} 0\,dS = 0.$$

Ytstycket Y_2 parameteriseras av $\mathbf{r}(x,y) = (x, y, x^2 + y^2)$ där $x^2 + y^2 \leq 4$, den utåtriktade normalen ges av $\dfrac{\partial r}{\partial y} \times \dfrac{\partial r}{\partial x} = (2x,\, 2y,\, -1)$. Flödet genom Y_2 blir därför (om D är cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 4$):

$$\begin{aligned}\int_{Y_2} (x,y,0) \cdot (2x, 2y, -1)\, dS &= \int_D (2x^2 + 2y^2)\, dxdy = \{\text{polära koordinater}\} \\ &= 2\pi \int_0^2 2r^3\, dr \\ &= 16\pi.\end{aligned}$$

Flödet är alltså 16π.

6. Bestäm en potentialfunktion till vektorfältet $\mathbf{F} = (ye^x + z, e^x + z, y + x)$ och använd denna för att beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där γ är skruvlinjen $\mathbf{r} = (\cos t,\, \sin t,\, t),\ 0 \leq t \leq \pi$.

Lösning: Om $U(x,y,z)$ är en potentialfunktion till vektorfältet F, så måste för det första $\partial U/\partial x = ye^x + z$. Det betyder att $U(x,y,z) = ye^x + zx + g(y,z)$ för någon funktion g. Eftersom för det andra $\partial U/\partial y = e^x + z$ ser vi nu att $\partial g/\partial y = z$ vilket betyder att $g(y,z) = yz + h(z)$. Det tredje villkoret som U måste uppfylla är $\partial U/\partial z = y + x$ vilket ger att $h(z) = C$ för någon konstant C. Vi kan lika gärna välja $C = 0$. Vi har då att $U(x,y,z) = ye^x + (x+y)z$ är en potentialfunktion till det givna vektorfältet. Nu ges kurvintegralen som potentialfunktionens värde i slutpunkten på kurvan minus potentialfunktionens värde i startpunkten på kurvan, dvs

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(-1, 0, \pi) - U(1, 0, 0) = -\pi.$$

7. Du har två vektorer i $\mathbf{R}^3$ givna i standardkoordinater som $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Bestäm matrisen (i standardkoordinater) för den linjära avbildning som består i ortogonal projektion på det plan genom origo som spänns upp av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

Lösning: En normal till planet ges av $u \times v = (-6, 6, 3)$, multipliceras denna med $1/3$ får vi $n = (-2, 2, 1)$ som förstås också är normal till planet. En godtycklig vektor v får en projektion v_P på planet som räknas ut enligt $v_P = v - v_n$, där v_n är v:s projektion på n. Matrisen för avbildningen har kolonnvektorer som är projektionerna av basvektorerna. I första kolonnen står därför

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}}{9}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5/9\\4/9\\2/9\end{pmatrix}.$$

Det som ska stå i matrisens andra kolonn fås med en liknande uträkning, där första basvektorn bytts ut mot andra, som $(0,1,0) - ((0,1,0)\cdot(-2,2,1)/9)(-2,2,1) = (4/9, 5/9, -2/9)$. I tredje kolonnen står $(0,0,1) - ((0,0,1)\cdot(-2,2,1)/9)(-2,2,1) = (2/9, -2/9, 8/9)$

Matrisen är alltså $\frac{1}{9}\begin{pmatrix}5 & 4 & 2\\ 4 & 5 & -2\\ 2 & -2 & 8\end{pmatrix}$

8. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D \frac{y}{2x+y}\,dxdy$ där D är den parallellogram som begränsas av linjerna $2y-x=0$, $2y-x=2$, $2x+y=1$, $2x+y=2$.

Lösning: Vi gör koordinatbytet

$$\begin{cases} u = 2y - x \\ v = 2x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{5}u + \frac{2}{5}v \\ y = \frac{2}{5}u + \frac{1}{5}v \end{cases}$$

och vi ser att beloppet av jacobianen för koordinatbytet är $1/5$. Därför får vi nu:

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{y}{2x+y}\,dxdy &= \int_1^2 \left(\int_0^2 \frac{1}{25}\frac{2u+v}{v}\,du\right) dv \\
&= \frac{1}{25}\int_1^2 \left[\frac{u^2+vu}{v}\right]_0^2 dv \\
&= \frac{1}{25}\int_1^2 \frac{4+2v}{v}\,dv \\
&= \frac{1}{25}\left[4\ln v + 2v\right]_1^2 \\
&= \frac{4\ln 2 + 2}{25}.
\end{aligned}$$

9. Bestäm arean av den största likbenta triangel som kan skrivas in i enhetscirkeln.

Lösning: Vi kan anta att triangelns symmetriaxel är y-axeln, dess hörn ligger då i punkterna $(0,1)$ och $(\pm x, y)$. Dess area är då $A(x,y) = x(1-y)$, där $x \geq 0$, som ska maximeras under bivillkoret $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Eftersom målfunktionen A uppenbart är kontinuerlig och bivillkoret definierar en kompakt mängd så existerar ett största värde. Det antas då i en randpunkt eller i en punkt som uppfyller Lagranges multiplikatorvillkor. Randpunkterna i det här fallet är $(0,1)$ och $(0,-1)$ som ger arean 0. Lagranges villkor säger att $grad\, f = \lambda grad\, g$ (om inte $grad\, g = 0$, vilket inte är fallet för oss), samtidigt som $g = 0$, dvs i vårt fall har vi följande system av villkor som ska vara uppfyllda:

$$\begin{cases} (1-y) = \lambda 2x \\ -x = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

Första ekvationen ger $\lambda = (1-y)/2x$ vilket insatt i den andra ger $x^2 = y^2 - y$ vilket insatt i den tredje ger $2y^2 - y - 1 = 0$ med lösning $y = -1/2$ och $y = 1$. Möjliga punkter för max är alltså (0 ± 1) och $(\sqrt{3}/2, -1/2)$ och vi ser att den senare punkten ger maximal area, nämligen $3\sqrt{3}/4$.

10. Finn alla lokala extrempunkter till funktionen $f(x,y) = e^{2x^2+y^4+4xy}$.

Lösning: Eftersom exponentialfunktionen är strängt växande räcker det att söka extrempunkter till exponenten $g(x,y) = 2x^2 + y^4 + 4xy$, som är ett polynom och alltså deriverbar hur många gånger som helst i hela planet. Vi börjar med att derivera och bestämma de kritiska punkterna till g. Vi har att $\partial g/\partial x = 4x + 4y$ och $\partial g/\partial y = 4y^3 + 4x$. Kritiska punkter är de punkter där båda dessa är noll, vilket inträffar när $y = -x$ och $x = -y^3$ samtidigt. Detta ger de kritiska punkterna $(0,0)$, $(1,-1)$ och $(-1,1)$. För att avgöra om dessa är extrempunkter behöver vi andraderivatorna: $\partial^2 g/\partial x^2 = 4$ och $\partial^2 g/\partial y^2 = 12y^2$ och $\partial^2 g/\partial x \partial y = 4$. I origo är alltså $g(x,y) = \dfrac{1}{2}(4x^2 + 2 \cdot 4xy)$ + högre ordningens termer $= \frac{1}{2}((2x+2y)^2 - 4y^2)$ + högre ordningens termer, så vi ser att origo är en sadelpunkt för g. I punkten $(1,-1)$ är $g(x,y) = \dfrac{1}{2}(4(x-1)^2 + 2 \cdot 4(x-1)(y+1) + 12(y+1)^2)$ + högre ordningens termer $= \frac{1}{2}((2(x-1) + 2(y+1))^2 + 8(y+1)^2)$ + högre ordningens termer, så vi ser att detta är en minpunkt. Av symmetriskäl gäller detsamma punkten $(-1,1)$. Den givna funktionen har alltså två extrempunkter, som båda är min-punkter, nämligen $(1,-1)$ och $(-1,1)$.