Lösningsförslag till tentamen i 5B1133, för BD, M, P, T den 2005–06–03.

1. Då $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$ blir A:s egenvärden 2 och 3. Egenvektorerna bestäms ur ekvationen $(A - \lambda E)\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$. Man får $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ respektive $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Således har vi $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ och $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Svar: Exempelvis $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ och $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

---

2. Vi har

$$f'_x = -\frac{4z}{(x+y)^2} + \frac{1}{x+2y+3z-5}$$

$$f'_y = -\frac{4z}{(x+y)^2} + \frac{2}{x+2y+3z-5}$$

$$f'_z = \frac{4}{x+y} + \frac{3}{x+2y+3z-5}$$

I punkten $(1,1,1)$ fås $f'_x = 0$, $f'_y = 1$, $f'_z = 5$ och $\operatorname{grad} f = (0,1,5)$. Eftersom f är en differentierbar funktion så är

$$f'_{\boldsymbol{v}}(1,1,1) = \frac{\boldsymbol{v} \cdot \operatorname{grad} f}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{(1,2,2)\cdot(0,1,5)}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = 4.$$

Svar: 4.

---

3. $$\iint_{\mathbf{D}} (2x+3y)\,dxdy = \int_0^1 dy \int_y^{2-y} (2x+3y)\,dx = \int_0^1 \Big[x^2 + xy\Big]_y^{2-y} dy = \int_0^1 (4 + 2y - 6y^2)\,dx =$$

$$= \Big[4y + y^2 - 2x^3\Big]_0^1 = 3.$$

Svar: 3.

---

4. Låt

$$P = \frac{xy^2 + 2y}{1+xy} \quad \text{och} \quad Q = \frac{2x^2y + 3x}{1+xy}.$$

Vi har

$$P'_y = \frac{x^2y^2 + 2xy + 2}{(1+xy)^2} \quad \text{och} \quad Q'_x = \frac{2x^2y^2 + 4xy + 3}{(1+xy)^2}.$$

Låt $\mathbf{D}$ beteckna kvadraten $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Enligt Greens formel får man

$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_{\mathbf{D}} (Q'_x - P'_y)\,dxdy = \iint_{\mathbf{D}} dxdy = \text{arean av } \mathbf{D} = 1.$$

Svar: 1.

---

5. a. $\operatorname{grad} f = \nabla f = (2xz, 2, x^2)$ och $\operatorname{div}\operatorname{grad} f = \nabla \cdot \operatorname{grad} f = 2z$.

b. $\operatorname{grad} f = \nabla f = (2xz, 2, x^2)$

$\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = \nabla \times \operatorname{grad} f = (0,0,0)$ (vilket inträffar för alla f).

c. $\operatorname{rot} \boldsymbol{F}$ är en vektor, grad är ej definierad för en vektor, alltså $\operatorname{grad}\operatorname{rot}\boldsymbol{F}$ ej definierad.

d. $\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F} = (z, 2z, 2)$

$\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \nabla \cdot \operatorname{rot}\boldsymbol{F} = 0$ (vilket inträffar för alla $\boldsymbol{F}$).

Svar: $\operatorname{div}\operatorname{grad} f = 2z$, $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = (0,0,0)$, $\operatorname{grad}\operatorname{rot}\boldsymbol{F}$ ej definierad, $\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = 0$.

---

6. Eftersom $f(x,y) = 6x + 2y$ är kontinuerlig och den tillåtna mängden $3x^2 + y^2 \le 16$ är sluten och begränsad så antar f både ett största och ett minsta värde i mängden. Detta sker antingen i en inre kritisk punkt eller i en kritisk punkt på randen eller i en singulär punkt.
Inre kritiska punkter fås ur ekvationesystemet $f'_x = 0$, $f'_y = 0$. Här är $f'_x = 6 \ne 0$ alltså det finns inga inre kritiska punkter.
Kritiska punkter på randen $g(x,y) = 3x^2 + y^2 - 16 = 0$ kan fås med hjälp av Lagranges metod dvs genom att lösa ekvationssystemet grad $f = t$ grad g under bivillkoret $g(x,y) = 0$:

$$\begin{cases} f'_x = t\,g'_x \\ f'_y = t\,g'_y \\ g\ = 0 \end{cases} \quad \text{dvs} \quad \begin{cases} 6 = 6tx \\ 2 = 2ty \\ 3x^2 + y^2 - 16 = 0 \end{cases}$$

Ur den första och den andra ekvationen fås $x = y$ vilket, insatt i den tredje ekvationen, ger $x = \pm 2$, dvs man får punkterna $(2,2)$ och $(-2,-2)$. Några singulära punkter finns inte.
Sammanfattningsvis får vi två kritiska punkter $(2,2)$ och $(-2,-2)$. I dessa punkter antar f värdena -16 och 16.

Svar: Största värdet = 16, minsta värdet = –16.

---

7. Låt **D** beteckna cirkelskivan $x^2 + y^2 \le 1$. Vi har

$$\hat{\boldsymbol{n}}\, dS = \pm(-z'_x,\ -z'_y,\ 1)\, dxdy = \{\ \hat{\boldsymbol{n}} \text{ har positiv } z\text{–komponent } \} = (-6x,\ -8y,\ 1)\, dxdy$$

och

$$\iint_{\mathbf{S}} (4y,\ -3x,\ z + x^2) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = \iint_{\mathbf{D}} (4y,\ -3x,\ z + x^2) \cdot (-6x,\ -8y,\ 1)\, dxdy =$$

$$= \iint_{\mathbf{D}} (z + x^2)\, dxdy = \iint_{\mathbf{D}} (4x^2 + 4y^2)\, dxdy =$$

$$= \{\ \text{substitution: } x = r\cos v,\ y = r\sin v,\ \mathbf{D} \text{ övergår på } \mathbf{G}\text{: } 0 \le r \le 1,\ 0 \le v \le 2\pi\ \} =$$

$$= \iint_{\mathbf{D}} 4r^3\, drdv = \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 4r^3\, dr = 2\pi.$$

Svar: 2π.

---

8. Vi har

$$J_f = \begin{bmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \cos y \\ \cos x & 1 \end{bmatrix}$$

och det $J_f = 2 - \cos x \cos y \ne 0$ för alla (x,y) vilket medför att funktionen $\boldsymbol{f}$ är lokalt inverterbar i en godtycklig punkt (x,y). Jacobimatrisen för den inversa funktionen $\boldsymbol{f}^{-1}$ ges av

$$J_{f^{-1}} = \begin{bmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & \cos y \\ \cos x & 1 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \{\ \text{i punkten } (x,y,u,v) = (0,0,0,1)\ \} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Speciellt ser vi att $x'_u(0,1) = 1$ och $y'_v(0,1) = 2$.

Svar: $x'_u(0,1) = 1$, $y'_v(0,1) = 2$, $J_{f^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

---

9. Den kvadratiska delen $x^2 + 4xy + ay^2$ beskrivs av matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{bmatrix}$. *Om* den givna ekvationen skall vara en ekvation för en parabel så måste ett av egenvärdena till matrisen A vara lika med noll. Egenvärdena fås ur ekvationen $\det(A - \lambda E) = 0$:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & a-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (1-\lambda)(a-\lambda) - 4 = 0.$$

För $\lambda = 0$ får vi $a = 4$, vilket alltså är det enda *tänkbara* värdet för vilket den givna ekvationen beskriver en parabel. Den karakteristiska ekvationen är då $(1-\lambda)(4-\lambda) - 4 = 0$ och man får rötterna 0 och 5.

Egenvektorerna bestäms ur ekvationen $(A - \lambda E)\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$. För $\lambda = 5$ får vi

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff 2b - c = 0.$$

En motsvarande egenvektor är $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Egenvektorerna till det andra egenvärdet $\lambda = 0$ är vinkelräta mot $\boldsymbol{v}_1$ och en egenvektor är därför $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

De båda valda egenvektorerna har längden $\sqrt{5}$. Koordinatbytet med transformationen

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}u - \dfrac{2}{\sqrt{5}}v \\ y = \dfrac{2}{\sqrt{5}}u + \dfrac{1}{\sqrt{5}}v \end{cases}$$

ger ekvationen $5u^2 - \sqrt{5}v = 0 \iff v = \sqrt{5}u^2$, alltså en parabel.

Svar: Parabeln $\iff a = 4$.

---

10. Vi parametriserar ytan, $\mathbf{S}$, genom $\boldsymbol{r}(x,y) = (x, y, z)$ där $z = 1 + xy$. Plattans totala massa är $\iint_{\mathbf{S}} \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, d\sigma$. Vi har

$$d\sigma = |\boldsymbol{r}'_x \times \boldsymbol{r}'_y| = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dxdy = \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dxdy$$

alltså massan är $\iint_{\mathbf{D}} (1 + x^2 + y^2)\, dxdy$ där $\mathbf{D}$ är cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 1$. Polär substitution ger $\int_0^{2\pi} dv \int_0^1 r(1 + r^2)\, dr = \dfrac{3\pi}{2}$.

Svar: $\dfrac{3\pi}{2}$.
