Institutionen för matematik
KTH

Tentamensskrivning, 2005–06–03, kl. 8.00–13.00.

5B1133, Analytiska metoder och linjär algebra 2, för BD, M, P, T.

5B1141, Analytiska metoder och linjär algebra 2, för IT.

För BD, M, P och T gäller följande:

Uppgifterna 1–5 svarar mot varsitt moment i den kontinuerliga examinationen. Av dessa uppgifter skall man bara lösa dem som svarar mot moment man inte blivit godkänd på under kursens gång. Bedömning här är Godkänd/Underkänd.

Uppgifterna 6–10 poängsätts med maximalt 4 poäng per uppgift. Betygsgränser:
A och 5: godkänt på alla momenten 1–5 och 14–20 poäng på uppgifterna 6–10
B och 4: godkänt på alla momenten 1–5 och 11–13 poäng på uppgifterna 6–10
C och 4: godkänt på alla momenten 1–5 och 8–10 poäng på uppgifterna 6–10
D och 3: godkänt på alla momenten 1–5 och 5–7 poäng på uppgifterna 6–10
E och 3: godkänt på alla momenten 1–5 och 3–4 poäng på uppgifterna 6–10
F och U: underkänt.

För IT gäller följande:

Alla uppgifter kan räknas, oavsett resultat på lappskrivningar.
Uppgifterna 1–5 är 3–poängsuppgifter, medan 6–10 är 4–poängsuppgifter.
Poängen från lappskrivningarna (0–12 poäng) adderas till poängsumman på tentamen, och för totalsumman gäller betygsgränserna 15 (betyg 3), 22 (betyg 4), 30 (betyg 5).

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga lösningar och motiveringar. Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv program och grupp tydligt på omslaget. Lycka till!

---

1. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bestäm en matris C och en diagonalmatris D sådana att $C^{-1}AC = D$.

2. Bestäm riktningsderivatan av funktionen

$$f(x,y,z) = \frac{4z}{x+y} + \ln(x + 2y + 3z - 5)$$

i punkten $(1,1,1)$ i riktning av vektorn $\boldsymbol{v} = (1,2,2)$.

3. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_{\mathbf{D}} (2x + 3y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

då $\mathbf{D}$ är det ändliga området som begränsas av linjerna $x + y = 2$, $y = x$ och $y = 0$.

4. Beräkna linjeintegralen

$$\int_{\Gamma} \frac{xy^2 + 2y}{1 + xy}\, \mathrm{d}x + \frac{2x^2y + 3x}{1 + xy}\, \mathrm{d}y$$

där Γ är randen av kvadraten $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ genomlöpt i positiv led.

5. Låt $f(x,y,z) = x^2z + 2y$ och $\boldsymbol{F} = (3x + z^2, 2x + y, yz)$. Avgör vilka av följande uttryck som har mening och beräkna dem i förekommande fall:

a. div grad f

b. rot grad f

c. grad rot $\boldsymbol{F}$

d. div rot $\boldsymbol{F}$.

V.g.vänd

6. Bestäm största och minsta värdet av funktionen $f(x,y) = 6x + 2y$ på den slutna ellipsskivan $3x^2 + y^2 \leq 16$. (4p)

7. Beräkna flödesintegralen

$$\iint_{\mathbf{S}} (4y,\ -3x,\ z + x^2) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}S$$

där $\mathbf{S}$ är den del av ytan $z = 3x^2 + 4y^2$ där $x^2 + y^2 \leq 1$. Enhetsnormalen $\hat{\boldsymbol{n}}$ har positiv z–komponent. (4p)

8. Visa att funktionen $\boldsymbol{f}(x,y)$ given av

$$\boldsymbol{f} : \begin{cases} u = 2x + \sin y \\ v = \sin x + y + 1 \end{cases}$$

är lokalt inverterbar i varje punkt (x,y). Bestäm inversens Jacobimatris svarande mot punkten $(x,y,u,v) = (0,0,0,1)$. Ange de partiella derivatorna $\dfrac{\partial x}{\partial u}$ och $\dfrac{\partial y}{\partial v}$ i denna punkt. (4p)

9. Undersök om det finns något tal a sådant att

$$x^2 + 4xy + ay^2 + 2x - y = 0$$

är ekvationen för en parabel. (4p)

10. En tunn platta som ges av $z = 1 + xy$, $x^2 + y^2 \leq 1$ har masstätheten $\sqrt{1 + x^2 + y^2}$ per ytenhet i varje punkt (x,y,z) på plattan. Bestäm plattans totala massa. (4p)

Lösningsförslag kommer att finnas på
http://www.math.kth.se/~bronek/amelia2/repetition/tentamen20050603.pdf