Institutionen för matematik
KTH

Lösningsförslag till tentamensskrivning, 2005-08-27, i
5B1133 och 5B1141, Amelia 2

1. Den inversa matrisen är
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Alltså är den sökta matrisen själv
$$A = (A^{-1})^{-1} = \frac{1}{7 \cdot 1 - 3 \cdot 2} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

2. Låt $F(x, y, z) = 2x^2 - y \cos z + 3x \sin z$. Då är
$$\operatorname{grad} F = (4x + 3\sin z, -\cos z, y \sin z + 3x \cos z) = (\text{ i punkten } (1,2,0)\ ) = (4, -1, 3).$$
Det följer att tangentplanet i punkten $(1, 2, 0)$ är
$$4(x - 1) + (-1)(y - 2) + 3z = 0,$$
eller, förenklat,
$$4x - y + 3z = 2.$$

3. Med $(x, y) = (2 + h, 1 + k)$ och med användande av $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - \ldots \ (|u| < 1)$ fås
$$f(2 + h, 1 + k) = \frac{1}{(2 + h)^2 - 3(1 + k)} = \frac{1}{1 + (4h - 3k + h^2)}$$
$$= 1 - (4h - 3k + h^2) + (4h - 3k + h^2)^2 - \ldots$$
$$= 1 - 4h + 3k + 15h^2 - 24hk + 9k^2 + \mathcal{O}((h^2 + k^2)^{3/2}).$$

4. Området D är triangeln med hörn i punkterna $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$. Omkastning av integrationsordning ger
$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 e^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \iint_D e^{-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^y e^{-y^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 y e^{-y^2}\,\mathrm{d}y = [-\frac{1}{2}e^{-y^2}]_0^1 = \frac{1}{2}(1 - e^{-1}).$$

5. Fältet $\mathbf{F}$ är definierat och kontinuerligt deriverbart i hela $\mathbb{R}^3$, och
$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \det \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{x} & \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{y} & \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & x^2 + \cos y & e^z \end{pmatrix} = (\mathbf{0},\ \mathbf{0},\ \mathbf{2x} - \mathbf{2x}\,) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}).$$
Alltså är $\mathbf{F}$ konservativt och har en potential, U, i hela $\mathbb{R}^3$.

Potentialen bestäms genom att integrera systemet

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = 2xy \\ \frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + \cos y \\ \frac{\partial U}{\partial z} = e^z. \end{cases}$$

Den första ekvationen ger

$$U = x^2 y + f(y, z),$$

där f är en tills vidare okänd funktion av y och z. Vi får

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + \frac{\partial f}{\partial y},$$

som jämfört med den mellersta ekvationen ovan ger att

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos y, \quad \text{dvs} \quad f(x, y) = \sin y + g(z)$$

för någon funktion g. Därmed har vi

$$U = x^2 y + \sin y + g(z), \quad \text{som ger} \quad \frac{\partial U}{\partial z} = g'(z).$$

Jämförelse med den sista ekvationen ovan ger att $g(z) = e^z + C$. Detta ger till slut

$$U = x^2 y + \sin y + e^z + C.$$

6. Man kan integrera direkt eller använda Gauss' sats. Vi väljer det senare och får (integration först med avseende på z och därefter polära koordinater i (x, y)-planet):

$$\iint_{\partial K} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, \mathrm{d}\sigma = \iiint_{\mathbf{K}} \operatorname{div} \mathbf{F} \, \mathrm{d}\mathbf{x}\mathrm{d}\mathbf{y}\mathrm{d}\mathbf{z} = \iiint_{\mathbf{K}} (\mathbf{3x^2} + \mathbf{3y^2} + \mathbf{3z^2}) \, \mathrm{d}\mathbf{x}\mathrm{d}\mathbf{y}\mathrm{d}\mathbf{z}$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \le 1} [3x^2 z + 3y^2 z + z^3]_0^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{x^2+y^2 \le 1} (6x^2 + 6y^2 + 8) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 (6r^2 + 8) \, r\mathrm{d}r = 2\pi [\frac{6r^4}{4} + \frac{8r^2}{2}]_0^1 = 11\pi.$$

7. Det ekvationssystem som koefficienterna a och b behöver uppfylla för att den räta linjen $y = ax + b$ ska gå genom de angivna punkterna är

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Man kan inte förvänta sig att detta system ska ha någon lösning (fler ekvationer än obekanta), men det i minsta kvadratmening bästa valet av a, b fås genom att lösa "normalekvationen"

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ovanstående förenklas till

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix},$$

som har lösningen

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 7/10 \end{pmatrix}.$$

Alltså är den sökta linjen

$$y = \frac{3}{5}x + \frac{7}{10}.$$

8. Vi skriver ekvationen på formen

$$(x, y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4,$$

där A är den symmetriska matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & 11 \end{pmatrix}.$$

Karakteristiska ekvationen för A är

$$\lambda^2 - 12\lambda - 64 = 0,$$

som har rötterna (= A:s egenvärden)

$$\lambda_1 = 16, \quad \lambda_2 = -4.$$

Den sökta matrisen C:s kolonner är egenvektorerna till λ_1 och λ_2 normerade till längd ett. En (onormerad) egenvektor $\mathbf{v_1}$ till λ_1 fås ur $A\mathbf{v_1} = \lambda_1\mathbf{v_1}$ (eller $(A - \lambda_1 E)\mathbf{v_1} = \mathbf{0}$), vilket ger, t.ex,

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 5\sqrt{3} \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Efter normering blir detta $\begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$. Med motsvarande räkningar för λ_2 fås

$$C = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Kurvans ekvation blir $16\xi^2 - 4\eta^2 = 4$, eller

$$4\xi^2 - \eta^2 = 1.$$

9. Sätt

$$F(x, y, z) = 2xyz - z^3.$$

Vi har

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2xy - 3z^2 = \begin{cases} 0 & \text{i punkten } (2, 3, 2) \\ -28 & \text{i punkten } (5, 2, 4) \end{cases}$$

Alltså är, enligt implicita funktionssatsen, ytan garanterat en graf till en kontinuerligt deriverbar funktion $z = z(x, y)$ i närheten av punkten $(5, 2, 4)$. Detta innebär att $F(x, y, z(x, y)) = 0$. Derivering med avseende på x och y ger

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

så att, i punkten $(5,2,4)$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{2yz}{2xy-3z^2}=-\frac{16}{-28}=\frac{4}{7},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{2xz}{2xy-3z^2}=-\frac{40}{-28}=\frac{10}{7}.$$

I punkten $(2,3,2)$ hade vi $\frac{\partial F}{\partial z}=0$ medan, till exempel,

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2yz=12\neq 0.$$

Det följer att ytan inte kan skrivas på formen $z=z(x,y)$ (med z kontinuerligt deriverbar) i närheten av $(2,3,2)$, ty ovanstående implicitderivering med avseende på x skulle ge motsägelsen $12+0=0$.

10. Den del, K_R, av K som befinner sig inom avstånd R från z-axeln har volym

$$\mathrm{Vol}\,(K_R)=\iint_{x^2+y^2\leq R^2}(\cosh(x^2+y^2)-\sinh(x^2+y^2))\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{x^2+y^2\leq R^2}e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=(\text{ polära koordinater })=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^R e^{-r^2}\,r\mathrm{d}r=2\pi[-\frac{1}{2}e^{-r^2}]_0^R=\pi(1-e^{-R^2}).$$

Detta växer mot π då $R\to\infty$. Alltså följer att K har ändlig volym $=\pi$.