Institutionen för matematik, KTH
Avd Matematik

Tentamensskrivning, 2005-08-27, kl. 14.00-19.00.
5B1133 Analytiska metoder och linjär algebra 2, för BD, M, P och T.
5B1141, Analytiska metoder och linjär algebra 2, för IT.

- För BD, M, P och T gäller följande:

  Uppgifterna 1-5 svarar mot varsitt moment i den kontinuerliga examinationen. Av dessa uppgifter skall man bara lösa dem som svarar mot moment man inte blivit godkänd på under kursens gång. Bedömning här är Godkänd/Underkänd.

  Uppgifterna 6-10 poängsätts med maximalt 4 poäng per uppgift. Betygsgränser:

  A och 5: godkänt på alla momenten 1-5 och 14-20 poäng på uppgifterna 6-10.

  B och 4: godkänt på alla momenten 1-5 och 11-13 poäng på uppgifterna 6-10.

  C och 4: godkänt på alla momenten 1-5 och 8-10 poäng på uppgifterna 6-10.

  D och 3: godkänt på alla momenten 1-5 och 5-7 poäng på uppgifterna 6-10.

  E och 3: godkänt på alla momenten 1-5 och 3-4 poäng på uppgifterna 6-10.

  F och U: underkänt.

- För IT gäller följande:

  Alla uppgifter kan räknas, oavsett resultat på lappskrivningar. Uppgifterna 1-5 är 3-poängsuppgifter, medan 6-10 är 4-poängsuppgifter. Poängen från lappskrivningarna (0-12 poäng) adderas till poängsumman på tentamen och för totalsumman gäller betygsgränserna 15 (betyg 3), 22 (betyg 4), 30 (betyg 5).

- Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga lösningar och motiveringar. Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv program och grupp tydligt på omslaget.

Lycka till!

Var god vänd!

Uppgift 1-5

1. Bestäm matrisen för den linjära avbildning $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som avbildar vektorn $(7, 2)$ på $(1, 0)$ och vektorn $(3, 1)$ på $(0, 1)$.

2. Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan
$$2x^2 - y\cos z + 3x\sin z = 0$$
i punkten $(1, 2, 0)$.

3. Bestäm Taylorutvecklingen av ordning 2 till funktionen
$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 - 3y}$$
i punkten $(x, y) = (2, 1)$. Ange resttermen på ordoform.

4. Integrationen
$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 e^{-y^2}\,\mathrm{d}y$$
kan uppfattas som beräkningen av en dubbelintegral över ett område D. Bestäm detta område, och beräkna sedan integralen genom att integrera först med avseende på x.

5. Undersök om vektorfältet
$$\boldsymbol{F} = (2xy,\ x^2 + \cos y,\ e^z)$$
är konservativt och bestäm i så fall en potential till det.

Uppgift 6-10

6. Beräkna flödesintegralen
$$\iint_{\partial K} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}\sigma$$
då $\boldsymbol{F}$ är vektorfältet
$$\boldsymbol{F} = (x^3 - z, y^3 - x, z^3 - y)$$
och ∂K betecknar den totala begränsningsytan till cylindern
$$K: \quad x^2 + y^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 2.$$
Normalvektorn $\hat{\boldsymbol{n}}$ är riktad ut från K.

7. Bestäm ekvationen för den räta linje $y = ax + b$ som i minsta kvadratmening bäst anpassar till de fyra punkterna $(x, y) = (-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$.

8. Kurvan
$$x^2 + 10\sqrt{3}\, xy + 11y^2 = 4$$
kan genom ett ortogonalt koordinatbyte bringas på formen
$$a\xi^2 + b\eta^2 = 1,$$
där a och b är konstanter och ξ, η de nya koordinaterna. De senare är relaterade till de ursprungliga koordinaterna x, y genom
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix},$$
där C är en ON-matris.

   Bestäm konstanterna a och b samt matrisen C. Ange även kurvans typ.

9. En yta definieras genom ekvationen
$$2xyz - z^3 = 16.$$
Undersök om ytan kan uppfattas som grafen till en kontinuerligt deriverbar funktion $z = z(x, y)$ i en omgivning till någon av punkterna $(2, 3, 2)$ och $(5, 2, 4)$ (som ligger på ytan).

   Bestäm, i förekommande fall, de partiell derivatorna $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ i punkten i fråga.

10. De hyperboliska trigonometriska funktionerna $\cosh t$ och $\sinh t$ definieras av
$$\cosh t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}), \quad \sinh t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}).$$
Undersök om den obegränsade kropp K som definieras av
$$K: \quad \sinh(x^2 + y^2) \leq z \leq \cosh(x^2 + y^2)$$
har ändlig volym och bestäm i så fall volymen.