1. Vi har

$$\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ a & a & 1 & 0\\ 2 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ a & a & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} = -(1-a) = a-1 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad a = 1$$

vilket innebär att vektorerna bildar en bas om och endast om $a \neq 1$.

Svar: $a \neq 1$.

---

2. Vi har

$$z'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x = 3f'_u + yf'_v$$

$$z'_y = f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y = 4f'_u + xf'_v$$

och

$$xz'_x + yz'_y = (3x+4y)f'_u + 2xyf'_v = uf'_u + 2vf'_v$$

Svar: $uf'_u + 2vf'_v$.

---

3. Vi har

$$\iint_{\mathbf{D}} (x+y-2)\,dxdy = \iint_{\mathbf{D}_1} (x+y-2)\,dxdy + \iint_{\mathbf{D}_2} (x+y-2)\,dxdy$$

där området $\mathbf{D}_1$ begränsas av linjerna $y = x, y = 3x$ och $x = 1$ och $\mathbf{D}_2$ begränsas av linjerna $x = 1, y = x$ och $x + y = 4$.

$$\iint_{\mathbf{D}_1} (x+y-2)\,dxdy = \int_0^1 dx \int_x^{3x} (x+y-2)\,dy = \int_0^1 \Big[xy + \frac{y^2}{2} - 2y\Big]_{y=x}^{y=3x} dx = \int_0^1 (6x^2 - 4x)\,dx = 0$$

$$\iint_{\mathbf{D}_2} (x+y-2)\,dxdy = \int_1^2 dx \int_x^{4-x} (x+y-2)\,dy = \int_1^2 \Big[xy + \frac{y^2}{2} - 2y\Big]_{y=x}^{y=4-x} dx = \int_1^2 (4x - 2x^2)\,dx = \frac{4}{3}$$

Svar: $\frac{4}{3}$.

---

4. Vi har $y = \sqrt{1-x^2}$, $dy = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ där x går från 1 till 0. Man får

$$xy^2dx + ydy = x(1-x^2)dx + \sqrt{1-x^2}\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -x^3dx$$

och

$$\int_\Gamma xy^2dx + ydy = -\int_1^0 x^3dx = \frac{1}{4}$$

Svar: $\frac{1}{4}$.

---

5. Låt $\mathbf{D}$ vara triangeln $0 \le y \le x, 0 \le x \le 1$. Vi har $z = xy^2$, $z'_x = y^2$, $z'_y = 2xy$ och

$$\hat{\boldsymbol{n}} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (-y^2, -2xy, 1).$$

Man får

$$\iint_{\mathbf{S}} (4x, 6y, z)\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,dS = \iint_{\mathbf{D}} (4x, 6y, xy^2)\cdot(-y^2, -2xy, 1)\,dxdy =$$

$$= \iint_{\mathbf{D}} -15xy^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x 15xy^2 \mathrm{d}y = -\int_0^1 \Big[5xy^3\Big]_{y=0}^{y=x} \mathrm{d}x = -\int_0^1 5x^4 \, \mathrm{d}x = -1.$$

$\boxed{\textbf{Svar: } -1.}$

6. Låt $f(x,y,z) = z^3 - 4xz + y + 2$. Vi har $f'_z = 3z^2 - 4x$ och i punkten $(1,1,1)$ får man $f(1,1,1) = 0$ och $f'_z(1,1,1) \neq 0$ vilket bevisar existensen av funktionen z. Implicit derivering med avseende på x av

$$z^3 - 4xz + y + 2 \qquad (*)$$

ger

$$3z^2 z'_x - 4z - 4xz'_x = 0$$

och för $x = 1, y = 1, z = 1$ får man $z'_x(1,1) = -4$.

Implicit derivering med avseende på y av (*) ger

$$3z^2 z'_y - 4xz'_y + 1$$

och för $x = 1, y = 1, z = 1$ får man $z'_y(1,1) = 1$. Det sökta polynomet ges av

$$z(1,1) + z'_x(1,1)(x-1) + z'_y(1,1)(y-1)$$

alltså

$\boxed{\textbf{Svar: } 1 - 4(x-1) + (y-1).}$

7. Partikelns hastighet vid tiden t ges av $\boldsymbol{v}(t) = (t + a, 2\sqrt{t} + b)$ för några konstanter a, b. Eftersom $\boldsymbol{v}(1) = (0,2)$ är $\boldsymbol{v}(t) = (t - 1, 2\sqrt{t})$. Den aktuella kurvans längd ges av

$$\int_1^3 |\boldsymbol{v}| \, \mathrm{d}t = \int_1^3 \sqrt{(t-1)^2 + (2\sqrt{2})^2} \, \mathrm{d}t = \int_1^3 (t+1) \, \mathrm{d}t = 6.$$

$\boxed{\textbf{Svar: } 6.}$

8. Vi söker största och minsta värden av funktionen $f(x,y) = x$ under bivillkoret $g(x,y) = 0$ där $g(x,y) = 4x^4 + 4x^3y + y^4 - 1$. Enligt Lagranges metod måste vi undersöka var funktionernas gradienter har samma riktning. Nu är $\operatorname{grad} f = (1,0)$ medan $\operatorname{grad} g = (16x^3 + 12x^2y, 4x^3 + 4y^3)$, vilket leder till $x^3 + y^3 = 0$, dvs. $y = -x$. Insättning i bivillkorsekvationen ger $4x^4 + 4x^3(-x) + x^4 = 1$, varav $x = \pm 1$.

$\boxed{\textbf{Svar: } \text{Intervallet } -1 \le x \le 1.}$

9. Avståndet mellan planet och origo är $1/\sqrt{3}$. Vrid till koordinater (u,v,w) som gör att planet blir parallellt med uv–planet. Detta påverkar inte volymen. Den kalott var volym vi skall bestämma beskrivs nu av $1/\sqrt{3} \le w \le 1$, $u^2 + v^2 + w^2 \le 1$. Vi beräknar volymen som

$$V = \int_{1/\sqrt{3}}^{1} A(w) \, \mathrm{d}w,$$

där $A(w)$ är arean av den skiva som fås för konstant w, en cirkel med radie $\sqrt{1 - w^2}$, dva $A(w) = \pi(1 - w^2)$. Vi får

$$V = \int_{1/\sqrt{3}}^{1} \pi(1 - w^2) \, \mathrm{d}w = \frac{18 - 8\sqrt{3}}{27} \pi.$$

$\boxed{\textbf{Svar: } \frac{18 - 8\sqrt{3}}{27} \pi.}$

10. Då $\boldsymbol{A}$ är symmetrisk $n \times n$–matris så existerar ON–bas $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ i $\mathbf{R}^n$ av egenvektorer till $\boldsymbol{A}$. Då alla egenvärden är $= 1$ har vi att $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_i$ för varje i alltså $\boldsymbol{A}$ är en matris för identitets avbildningen, dvs $\boldsymbol{A} = \mathbf{E}$.