Institutionen för matematik
KTH

Tentamensskrivning, 2006–01–17, kl. 14.00–19.00.

5B1133, Analytiska metoder och linjär algebra 2, för BD, M, P, T.

5B1141, Analytiska metoder och linjär algebra 2, för IT.

För BD, M, P och T gäller följande:

Uppgifterna 1–5 svarar mot varsitt moment i den kontinuerliga examinationen. Av dessa uppgifter skall man bara lösa dem som svarar mot moment man inte blivit godkänd på under kursens gång. Bedömning här är Godkänd/Underkänd.

Uppgifterna 6–10 poängsätts med maximalt 4 poäng per uppgift. Betygsgränser:
A och 5: godkänt på alla momenten 1–5 och 14–20 poäng på uppgifterna 6–10
B och 4: godkänt på alla momenten 1–5 och 11–13 poäng på uppgifterna 6–10
C och 4: godkänt på alla momenten 1–5 och 8–10 poäng på uppgifterna 6–10
D och 3: godkänt på alla momenten 1–5 och 5–7 poäng på uppgifterna 6–10
E och 3: godkänt på alla momenten 1–5 och 3–4 poäng på uppgifterna 6–10
F och U: underkänt.

För IT gäller följande:

Alla uppgifter kan räknas, oavsett resultat på lappskrivningar.
Uppgifterna 1–5 är 3–poängsuppgifter, medan 6–10 är 4–poängsuppgifter.
Poängen från lappskrivningarna (0–12 poäng) adderas till poängsumman på tentamen, och för totalsumman gäller betygsgränserna 15 (betyg 3), 22 (betyg 4), 30 (betyg 5).

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga lösningar och motiveringar. Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv program och grupp tydligt på omslaget. Lycka till!

---

1. För vilka värden på konstanten a bildar vektorerna

$$(1,2,1,0),\ (a,a,1,0),\ (2,1,2,1)\ \text{och}\ (1,1,1,0)$$

en bas i $\mathbf{R}^4$?

2. Vi förutsätter att funktionen $f(u,v)$ har kontinuerliga partiella derivator. Sätt $z = f(u, v)$ där $u = 3x + 4y$, $v = xy$. Bestäm $xz'_x + yz'_y$. Svaret får innehålla f, u och v men inte x och y.

3. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_{\mathbf{D}} (x + y - 2)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

då $\mathbf{D}$ är det ändliga område som begränsas av linjerna $y = x, y = 3x$ och $x + y = 4$.

4. Beräkna linjeintegralen

$$\int_{\Gamma} xy^2\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y$$

längs kvartscirkeln $x^2 + y^2 = 1$ från punkten $(1,0)$ till punkten $(0,1)$.

5. Beräkna flödesintegralen

$$\iint_{\mathbf{S}} (4x,\ 6y,\ z) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}S$$

där $\mathbf{S}$ är ytan $z = xy^2$, $0 \le y \le x$, $0 \le x \le 1$. Enhetsnormalen $\hat{\boldsymbol{n}}$ har positiv z–komponent.

V.g.vänd

6. Visa att ekvationen

$$z^3 - 4xz + y + 2 = 0$$

definierar i en omgivning av punkten $(1,1,1)$ precis en funktion $z = z(x,y)$ sådan att $z(1,1) = 1$. Bestäm Taylorpolynomet av första graden till z kring punkten $(1,1)$. (4p)

7. En partikel färdas i planet så att dess acceleration vid tiden t är $\boldsymbol{a}(t) = \left(1, \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$. Partikelns hastighet vid tiden $t = 1$ är $\boldsymbol{v}(1) = (0,2)$. Hur lång bana genomlöper partikeln under tidsintervallet $1 \le t \le 3$? (4p)

8. Man vet att kurvan $4x^4 + 4x^3y + y^4 = 1$ är sluten. Bestäm dess projektion på x–axeln. (4p)

9. Planet $x + y + z = 1$ delar enhetsklotet $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$ i två delar. Beräkna volymen av den mindre delen. (4p)

10. En symmetrisk matris $\boldsymbol{A}$ har alla egenvärden lika med ett. Visa att $\boldsymbol{A}$ är enhetsmatrisen $\mathbf{E}$. (4p)

Lösningsförslag kommer att finnas på
http://www.math.kth.se/~bronek/amelia2/repetition/tentamen20050603.pdf