Lösningsförslag till tentamen i 5B1133, för BD, M, P, T. 2006–05–30.

1. Eftersom $A$ är inverterbar så är $A(2,1) = (6,7)$. Vi söker konstanter $a$ och $b$ så att

$$(4,5) = a(-1,1) + b(2,1) \iff \begin{cases} -a + 2b = 4 \\ a + b = 5 \end{cases} \iff a = 2,\ b = 3.$$

dvs. $(4,5) = 2(-1,1) + 3(2,1)$. Lineariteten av $A$ medför att

$$A(4,5) = 2A(-1,1) + 3A(2,1) = 2(3,1) + 3(6,7) = (24,23)$$

**Svar:** (24,23).

---

2. Vi har

$$z'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x = \frac{1}{y} f'_u + y f'_v$$

$$z'_y = f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y = -\frac{x}{y^2} f'_u + x f'_v$$

och

$$x z'_x + y z'_y = 2xy f'_v = 2v f'_v$$

**Svar:** $2vf'_v$.

---

3. Låt $f(x,y,z) = 2xz + 5xy - z^3 - 35$. Vi har $f'_z = 2x - 3z^2$ och i punkten (3,2,1) får man $f(3,2,1) = 0$ och $f'_z(3,2,1) \neq 0$ vilket bevisar existensen av funktionen $z$.

Vi har

$$\text{grad } f = (f'_x, f'_y, f'_z) = (2z + 5y,\ 5x,\ 2x - 3z^2)$$

och $\text{grad } f(3,2,1) = (12,15,3)$.

Tangentplanet ges av

$$(12,15,3) \cdot (x - 3, y - 2, z - 1) = 0$$

och efter förenkling får vi $4x + 5y + z = 23$.

Metod 2.

Implicit derivering med avseende på $x$ av

$$2xz + 5xy - z^3 - 35 = 0 \qquad (*)$$

ger

$$2z + 2xz'_x + 5y - 3z^2 z'_x = 0$$

och för $x = 3, y = 2, z = 1$ får man $z'_x(3,2) = -4$.

Implicit derivering med avseende på $y$ av (*) ger

$$2xz'_x + 5x - 3z^2 z'_y = 0$$

och för $x = 3, y = 2, z = 1$ får man $z'_y(3,2) = -5$.

Tangentplanet ges av

$$z'_y(3,2)(x - 3) + z'_y(3,2)(y - 2) - (z - 1) = 0$$

alltså

$$-4(x - 3) - 5(y - 2) - (z - 1) = 0$$

och efter förenkling får vi

**Svar:** $4x + 5y + z = 23$.

---

4. Vi har

$$\iint_{\mathbf{D}} \frac{x}{y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^3 \mathrm{d}x \int_x^{2x} \frac{x}{y^2}\,\mathrm{d}y = \int_1^3 \left[\frac{-x}{y}\right]_x^{2x} \mathrm{d}x = \int_1^3 \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x = 1.$$

**Svar:** 1.

---

5. Låt $\Gamma_1$ beteckna parabelbågen $y = x^2$ från punkten $(0,0)$ till punkten $(1,1)$ och låt $\Gamma_2$ beteckna linjen $y = 1$ från punkten $(1,1)$ till punkten $(-2,1)$. Vi har

$$\int_{\Gamma_1} 4xy\,\mathrm{d}x + (3x+2y)\,\mathrm{d}y = \{\, y = x^2,\ \mathrm{d}y = 2x\,\mathrm{d}x,\ x \text{ från } 0 \text{ till } 1 \,\} = \int_0^1 (8x^3 + 6x^2)\,\mathrm{d}x = \Big[2x^4 + 2x^3\Big]_{\text{ö}}^{1} = 4$$

$$\int_{\Gamma_2} 4xy\,\mathrm{d}x + (3x+2y)\,\mathrm{d}y = \{\, y = 1,\ \mathrm{d}y = 0,\ x \text{ från } 1 \text{ till } -2 \,\} = \int_1^{-2} 4x\,\mathrm{d}x = \Big[2x^2\Big]_1^{-2} = 6$$

$$\int_{\Gamma} 4xy\,\mathrm{d}x + (3x+2y)\,\mathrm{d}y = \int_{\Gamma_1} 4xy\,\mathrm{d}x + (3x+2y)\,\mathrm{d}y + \int_{\Gamma_2} 4xy\,\mathrm{d}x + (3x+2y)\,\mathrm{d}y = 10.$$

**Svar:** 10.

---

6. Låt $\mathbf{D}$ beteckna triangeln $x + y \le 2,\ y \le x,\ y \ge 0$. Vi har

$$\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = \pm(-z'_x, -z'_y, 1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \{\text{ positiv } z\text{–komponent }\} = (-y, -x, 1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

och

$$\iint_{\mathbf{S}} (x, 2y, 9z)\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = \iint_{\mathbf{D}} (x, 2y, 9z)\cdot(-y, -x, 1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \iint_{\mathbf{D}} (-xy - 2xy + 9z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\mathbf{D}} (-3xy + 9xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \iint_{\mathbf{D}} 6xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^{2-y} 6xy\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \Big[3x^2y\Big]_y^{2-y} \mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^1 (12y - 12y^2)\,\mathrm{d}y = \Big[6y^2 - 4y^3\Big]_0^1 = 2.$$

**Svar:** 2.

---

7a. Eventuella lokala extrempunkter till funktionen $f(x,y) = xy$ fås ur ekvationssystemet

$$\begin{cases} f'_x = y = 0 \\ f'_y = x = 0 \end{cases}$$

Man får punkten $(0,0)$. I denna punkt får vi
$A = f''_{xx} = 0,\ B = f''_{xy} = 1,\ C = f''_{yy} = 0$ och $AC - B^2 = -1 < 0$ vilket innebär att $(0,0)$ är en sadelpunkt.

**Svar:** Funktionen har inga lokala extrempunkter.

7b. Eftersom funktionen $f(x,y) = xy$ är kontinuerlig och den tillåtna mängden $x^2 + 4y^2 \le 128$ är sluten och begränsad så antar $f$ både ett största och ett minsta värde i mängden. Detta sker antingen i en inre lokalextrempunkt eller i en singulär punkt eller i en kritisk punkt på randen. Enligt 7a finns det inga inre lokalextrempunkter. Det finns inte heller några singulära punkter (varken för $f$ eller på ellipsen).

Kritiska punkter på randen $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 128 = 0$ kan fås med hjälp av Lagranges metod dvs genom att lösa ekvationssystemet grad $f = t$ grad $g$ under bivillkoret $g(x,y) = 0$:

$$\begin{cases} f'_x = t\,g'_x \\ f'_y = t\,g'_y \\ g = 0 \end{cases} \quad \text{dvs} \quad \begin{cases} y = 2tx \\ x = 8ty \\ x^2 + 4y^2 = 128 \end{cases}$$

Observera att varken $x$ eller $y$ kan vara lika med 0. Den första ekvationen divideras ledvis med den andra. Man får $\dfrac{y}{x} = \dfrac{2tx}{8ty}$ och efter förenkling $x = \pm 2y$ vilket, insatt i den tredje ekvationen, ger $y = \pm 4$, dvs man får fyra kritiska punkter $(8,4)$, $(8,-4)$, $(-8,4)$ och $(-8,-4)$. I dessa punkter antar $f$ största värdet $32$ (och minsta värdet $-32$). Följaktligen finns det inte någon punkt $(x,y)$ på ellipsskivan sådan att $f(x,y) = 33$.

**Svar:** Nej, det kan den inte.

---

8. Ur integralsambandet fås att **D** är ett område i $xy$–planet som ges av $0 \le x \le y/2$, $0 \le y \le 4$.

Integranden tyder på att uppgiften handlar om beräkning av arean av ytan $z = f(x,y)$ över **D**. Ur $f'_x = \sqrt{8}$, $f'_y = y$ fås $f(x,y) = 2\sqrt{2}x + \dfrac{y^2}{2}$ + någon konstant. Vi har

$$\iint_{\mathbf{D}} \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 \mathrm{d}x \int_{2x}^4 \sqrt{9 + y^2}\,\mathrm{d}y = \int_0^4 \mathrm{d}y \int_0^{y/2} \sqrt{9 + y^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^4 \sqrt{9 + y^2}\,\Big[x\Big]_0^{y/2}\mathrm{d}y = \int_0^4 \frac{1}{2}y\sqrt{9 + y^2}\,\mathrm{d}y =$$

$$= \{\ \sqrt{9 + y^2} = t,\ \ 9 + y^2 = t^2,\ \ y\mathrm{d}y = t\mathrm{d}t\ \} = \frac{1}{2}\int_3^5 t^2\,\mathrm{d}t = \frac{49}{3}.$$

**Svar:** Beräkna arean av ytan $z = 2\sqrt{2}x + \dfrac{y^2}{2}$, $0 \le x \le 2$, $2x \le y \le 4$. Arean $= \dfrac{49}{3}$.

---

9. Antag att

$$a\boldsymbol{v}_1 + b(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) + c(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_3) + d(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_4) = \mathbf{0}.$$

Då gäller efter omskrivning att

$$(a + b + c + d)\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2 + c\boldsymbol{v}_3 + d\boldsymbol{v}_4 = \mathbf{0}.$$

Om $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ är linjärt oberoende så måste det gälla att

$$a + b + c + d = b = c = d = 0$$

dvs $a = b = c = d = 0$. Detta innebär att vektorerna $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_3,\ \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_4$ är linjärt oberoende.

Antag att

$$a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2 + c\boldsymbol{v}_3 + d\boldsymbol{v}_4 = \mathbf{0}.$$

Då gäller efter omskrivning att

$$(a - b - c - d)\boldsymbol{v}_1 + b(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) + c(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_3) + d(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_4) = \mathbf{0}.$$

Om $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_3,\ \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_4$ är linjärt oberoende så måste

$$a - b - c - d = b = c = d = 0$$

dvs $a = b = c = d = 0$. Detta innebär att vektorerna $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ är linjärt oberoende.

---

10. Låt $T$ vara en sådan triangel. Vi byter koordinatssystem i $xy$–planet genom att sätta $u = ax$ och $v = by$. Funktionerna $u$ och $v$ är linjära varför triangeln $T$ avbildas på en triangel, säg $S$. Ellipsen $a^2x^2 + b^2y^2 = 1$ deformeras till cirkeln $u^2 + v^2 = 1$. Vi har

$$\text{arean av } S = \iint_S \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint_T \left|\det \frac{\mathrm{d}(u,v)}{\mathrm{d}(x,y)}\right| \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_T ab \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = ab \cdot \text{arean av } T$$

dvs. maximala arean av $T$ = (maximala arean av $S$)$/ab = \dfrac{3\sqrt{3}}{4ab}$.

$\boxed{\textbf{Svar: } \dfrac{3\sqrt{3}}{4ab}.}$