KTH Matematik

Tentamensskrivning, 2006–05–30, kl. 14.00–19.00.

5B1133, Analytiska metoder och linjär algebra 2, för BD, M, P, T.

Uppgifterna 1–5 svarar mot varsitt moment i den kontinuerliga examinationen. Av dessa uppgifter skall man bara lösa dem som svarar mot moment man inte blivit godkänd på under kursens gång. Bedömning här är Godkänd/Underkänd.

Uppgifterna 6–10 poängsätts med maximalt 4 poäng per uppgift. Betygsgränser:

A och 5: godkänt på alla momenten 1–5 och 14–20 poäng på uppgifterna 6–10
B och 4: godkänt på alla momenten 1–5 och 11–13 poäng på uppgifterna 6–10
C och 4: godkänt på alla momenten 1–5 och 8–10 poäng på uppgifterna 6–10
D och 3: godkänt på alla momenten 1–5 och 5–7 poäng på uppgifterna 6–10
E och 3: godkänt på alla momenten 1–5 och 3–4 poäng på uppgifterna 6–10
F och U: underkänt.

Tentamensbetyget gäller som betyg på hela kursen under förutsättning att man är godkänd på Inlämningsuppgifter v.

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga lösningar och motiveringar. Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv program och grupp tydligt på omslaget. Lycka till!

---

1. För en inverterbar linjär avbildning $A: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ gäller att

$$A(-1,1) = (3,1) \text{ och } A^{-1}(6,7) = (2,1).$$

Bestäm $A(4,5)$.

2. Vi förutsätter att funktionen $f(u,v)$ har kontinuerliga partiella derivator. Sätt $z = f(u,v)$ där $u = \dfrac{x}{y}$, $v = xy$. Bestäm $xz'_x + yz'_y$. Svaret får innehålla f, u och v men inte x och y.

3. Visa att ekvationen

$$2xz + 5xy - z^3 = 35$$

definierar i en omgivning av punkten $(3,2,1)$ precis en funktion $z = z(x,y)$ sådan att $z(3,2) = 1$. Bestäm en ekvation för tangetplanet till ytan $z = z(x,y)$ i punkten $(3,2,1)$.

4. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_{\mathbf{D}} \frac{x}{y^2}\, dx dy$$

då $\mathbf{D}$ är den fyrhörning som begränsas av linjerna $y = x$, $y = 2x$, $x = 1$, $x = 3$.

5. Beräkna linjeintegralen

$$\int_\Gamma 4xy\, dx + (3x + 2y)\, dy$$

då Γ är den kurva som sammansätts av parabelbågen $y = x^2$ från $(0,0)$ till $(1,1)$ och därifrån sträckan längs linjen $y = 1$ från $(1,1)$ till $(-2,1)$.

V.g.vänd

6. Beräkna flödesintegralen (4p)

$$\iint_{\mathbf{S}} (x,\ 2y,\ 9z) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\ \mathrm{d}S$$

där $\mathbf{S}$ är den del av ytan $z = xy$ som projiceras på den triangel som begränsas av linjerna $x + y = 2$, $y = x$, $y = 0$. Enhetsnormalen $\hat{\boldsymbol{n}}$ har positiv z–komponent (dvs $\hat{\boldsymbol{n}}$ pekar uppåt).

7. Betrakta funktionen $f(x,y) = xy$. (4p)

a. Bestäm eventuella lokala extrempunkter (och deras karaktär) till f.

b. Kan f anta värdet 33 om (x,y) tillhör ellipsskivan $x^2 + 4y^2 \leq 128$?

8. Osquar har lämnat in nedanstående felfria men ofullbordade lösningen på ett tentamens-problem. Formulera problemet. Lös problemet.

$f'_x = \sqrt{8}$, $f'_y = y$. Enligt formeln för (*en kaffefläck och oläsbar text*)

$$\iint_{\mathbf{D}} \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 \mathrm{d}x \int_{2x}^4 \sqrt{9 + y^2}\, \mathrm{d}y = ?$$

Jag tror att jag kastar om integrationsordning.

Sedan får jag kanske substituera $\sqrt{9 + y^2} = t$.

Usch! Hur gör man?

Tidsbrist!!! (4p)

9. Visa att vektorerna $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ är linjärt oberoende om och endast om vektorerna

$$\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2,\ \ \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_3,\ \ \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_4$$

är linjärt oberoende. (4p)

10. Den maximala arean för en triangel vars hörn ligger på en cirkel antas för en liksidig triangel. Vilken är den maximala arean av en triangel vars hörn ligger på ellipsen $a^2x^2 + b^2y^2 = 1$? (4p)

Lycka till!