KTH Matematik

**TENTAMENSSKRIVNING TISDAGEN 30/5**
**14.00-19.00-LÖSNINGAR**

5B1141, ANALYTISKA METODER OCH LINJÄR ALGEBRA II FÖR ÖPPEN INGÅNG OCH IT-PROGRAMMET.

1. För en linjär avbildning $\mathrm{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gäller att
$$\mathrm{A}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \text{ och } \mathrm{A}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\7\end{pmatrix}.$$
Bestäm $\mathrm{A}\binom{4}{5}$.

Lösning: Antag att du har en överföringsmatris
$$\begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix}$$
Om vi låter denna matris verka på vektorerna som är angivna får vi följande ekvationssystem:
$$\begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \text{ och } \begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\7\end{pmatrix}$$
Vi får då att överforingsmatrisen blir
$$\begin{pmatrix} 1 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix} \text{ och att } \begin{pmatrix} 1 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}24\\23\end{pmatrix}$$
Svar: $\mathrm{A}\binom{4}{5} = \binom{24}{23}$

2. Antag att $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ har kontinuerliga partiella derivator. Låt
$$h(x,y) = f\left(\frac{x}{y}, xy\right), y \neq 0.$$
Bestäm
$$x\frac{\partial}{\partial x}h(x,y) + y\frac{\partial}{\partial y}h(x,y)$$
som ett uttryck enbart innehållande $f$ :s partiella derivator samt $x$ och $y$.

Lösning: Vi får att
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f\left(\frac{x}{y}, xy\right)\right) = \frac{1}{y}f_1'\left(\frac{x}{y}, xy\right) + yf_2'\left(\frac{x}{y}, xy\right)$$
och
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(f\left(\frac{x}{y}, xy\right)\right) = \frac{-x}{y^2}f_1'\left(\frac{x}{y}, xy\right) + xf_2'\left(\frac{x}{y}, xy\right)$$
Vi får då att
$$x\frac{\partial h}{\partial x} + y\frac{\partial h}{\partial y} =$$
$$\frac{x}{y}f_1'\left(\frac{x}{y}, xy\right) + xyf_2'\left(\frac{x}{y}, xy\right) - \frac{x}{y}f_1'\left(\frac{x}{y}, xy\right) + xyf_2'\left(\frac{x}{y}, xy\right) =$$

$$= 2xyf_2'\left(\frac{x}{y}, xy\right)$$

3. Antar funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, där

$$f(x, y) = 24xye^{-x^2-4y^2},$$

värdet 2?

Lösning: Vi behöver veta funktionens största och minsta värde på planet. Funktionen är kontinuerlig i alla punkter på planet. Vi har dock inte ett begänsat område. De intressanta punkterna är då eventuella extrempunkter plus vad som händer då någon eller bägge variablerna går mot oändligheten. Vi börjar med att undersöka eventuella extrempunkter.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(24xye^{-x^2-4y^2}\right) = 24e^{-x^2-4y^2}(y - 2x^2y)$$

och

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(24xye^{-x^2-4y^2}\right) = 24e^{-x^2-4y^2}(x - 8xy^2)$$

Vi ser att vi får kritiska punkter då $(x, y) = (0, 0), (\pm 1/\sqrt{2}, 1/2\sqrt{2})$. Värdena i två punkter är $f(0, 0) = 0, f(1/\sqrt{2}, 1/2\sqrt{2}) = 6/e$. Tag ett kompakt område där dessa två punkter är inre punkter. Satsen om mellanliggande värden säger att alla värden mellan 0 och 6/e antast i området. Eftersom $6/e > 2$ antar funktionen värdet 2.

4. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D e^{-y^2}dxdy$$

där området $D$ i $xy$-planet bestäms av $|x| \leq y$ och $0 \leq y \leq 1$.

Lösning:

$$\iint_D e^{-y^2}dxdy = \int_{y=0}^{1}\left(\int_{x=-y}^{y} e^{-y^2}dx\right)dy =$$

$$= \int_0^1 2ye^{-y^2}dy = \left[-e^{-y^2}\right]_0^1 = 1 - 1/e.$$

5. Låt $K$ vara den solida cylinderbit som beskrivs av olikheterna $x^2 + y^2 \leq 2$ och $-3 \leq z \leq 3$. Beräkna flödet av fältet $\mathbf{u} = (xz, x^2y, yz)$ ut genom den totala begränsningsytan till $K$.

Lösning:$C^1$ fält, sluten styckvis $C^1$-yta. Gauss sats ger att

$$\iint_{\partial K} \mathbf{u} \cdot \hat{n}dS = \iiint_K \mathrm{div}\mathbf{u}dxdydz = \iint_K (z + x^2 + y)dxdydz$$

Använd cylinderkoordinater dvs $x = r\cos\phi, y = r\sin\phi, z = z. dxdydz = rdrd\phi dz, 0 < r \le \sqrt{2}, 0 < \phi \le 2\pi, -3 \le z \le 3$. De tre olikheterna spänner upp kuben $K'$. Vi får då integralen

$$\iiint_{K'} (z + r^2\cos^2\phi + r\sin\phi) r dr d\phi dz =$$

$$\int_{z=-3}^{3} \Big( \int_{r=0}^{1} \Big( \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \Big) r dr \Big) dz =$$

$$= 2\pi \int_{z=-3}^{3} \Big( \int_{r=0}^{1} \frac{r^3}{2} dr \Big) dz = 12\pi \left[ \frac{r^4}{8} \right]_0^{\sqrt{2}} = 6\pi$$

pga integrering av udda funktion över symmetriskt intervall och integrering av sin och cos funktioner över hela perioder.
Svar: $6\pi$

6. Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma (\pi\sin(\pi x) - y^2 e^{1-x})dx + (\pi\cos(\pi y) + 2ye^{1-x})dy$$

där $\gamma$ är delen av ellipsen $4(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$ från punkten (2,1) till punkten (1,3) tagen i positiv riktning.

Lösning: Det finns ett flertal möjliga lösningar. Den enklaste är nog att använda att fältet $f(x,y) = (\pi\sin(\pi x) - y^2e^{1-x}, \pi\cos(\pi y) + 2ye^{1-x})$ är konservativt och att det således existerar en potentialfunktion $U$ så att $f = \text{grad } U$. Integrering av första kordinaten map x ger att

$$U(x,y) = -\cos(\pi x) + y^2e^{1-x} + \psi(y)$$

Derivering map y ger att

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 2ye^{1-x} + \psi'(y)$$

Vi ser att $\psi'(y) = \pi\cos(\pi y)$ dvs $\psi(y) = sin(\pi y) + C$ där $C$ är en konstant. Vi får att $U(x,y) = -\cos(\pi x) + y^2e^{1-x} + sin\pi y + C$ Vi får då att

$$\int_\gamma f\cdot dr = U(1,3) - U(2,1) = 1 + 9 + 0 + C + 1 - e^{-1} - 0 - C.$$

Svar: $11 - e^{-1}$

7. Visa att ekvationen

$$2xz + 5xy - z^3 = 35$$

i en omgivning av punkten $(3,2,1)$ definierar en funktion $z = z(x,y)$ sådan att $z(3,2) = 1$. Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $z = z(x,y)$ i punkten $(3,2,1)$.

Lösning: Ansätt att $f(x,y,z) = 2xz + 5xy - z^3 - 35$ Implicita funktionssatsen ger att om $f'_z(3,2,1) \neq 0$ definierar ekvationen en entydig funktion $z = z(x,y)$ i en omgivning av (3,2,1).

För att få fram en normalvektor till planet deriverar vi ekvationen implicit.

$$\frac{\partial}{\partial x}(2xz + 5xy - z^3 = 35)$$

$$\leftrightarrow 2z + 2xz'_x + 5y - 3z^2 z'_x = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(2xz + 5xy - z^3 = 35)$$

$$\leftrightarrow 2xz'_y + 5x - 3z^2 z'_y = 0$$

Vi får att $z'_x = -4$ och $z'_y = -5$ dvs vi får att en normalvektor är (-4,-5,-1). Tangentplanets ekvation blir då $(4, 5, 1) \cdot (x - 3, y - 2, z - 1) = 0$.
Svar: Planets ekvation blir $4x + 5y + z - 23 = 0$

8. Beräkna arean av den del av ytan $x^2 - y^2 - 4z = 0$ som ligger innanför cylindern $x^2 + y^2 = 1$.

Lösning: Låt ytan betecknas med Y och projiktionen av cylindern på xy-planet med D. Vi skall bestämma areaintegralen:

$$\iint_Y dS = \iint_D |\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}| dxdy$$

Ur formeln för ytan löser vi ut $z$ och får att $z = \frac{1}{4}(x^2 - y^2)$. Parametrisera ytan enligt $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, \frac{1}{4}(x^2 - y^2))$. Vi får då att

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \frac{1}{2}x \text{ och } \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = -\frac{1}{2}y$$

Vi får då att

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \left(-\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y, 1\right)$$

Vårt areaelement blir då $dS = \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + 1}$ och integralen blir

$$\iint_Y dS = \iint_D \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + 1} dxdy = \left\{ \begin{array}{c} \text{Polära kordinater} \\ x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ dxdy = rdrd\phi \\ 0 < r \leq 1 \\ 0 < \phi \leq 2\pi \end{array} \right\} =$$

$$\frac{1}{2}\int_{\phi=0}^{2\pi} \left(\int_{r=0}^{1} \sqrt{r^2 + 4} r dr\right) d\phi = \frac{\pi}{3}\left[(r^2 + 4)^{3/2}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{3}(5^{3/2} - 4^{3/2}) = \frac{\pi}{3}(5\sqrt{5} - 8)$$

9. Låt $A$ vara matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 8 & 4 \\ -4 & 5 & 2 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Bestäm matriser $P$ och $D$ så att $P^{-1}AP = D$, där $D$ är en diagonalmatris, och använd resultatet till att beräkna $A^n$ för alla positiva heltal $n$.

Lösning: Egenvärdesekvationen för matrisen blir $-(1-\lambda)^2(1+\lambda) = 0$ dvs vi har egenvärde 1 med multiplicitet 2 och egenvärde -1. Egenvärdet -1 ger egenvektorn (2,1,1) och egenvärdet 1 ger egenvektorerna (1,0,2) och (0,1,-2). Vi får att matriserna

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ och } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

och att

$$A^n = PD^nP^{-1} = \text{“ n jämnt “} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

och

$$A^n = PD^nP^{-1} = \text{“ n udda “} = \begin{pmatrix} -7 & 8 & 4 \\ -4 & 5 & 2 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

10. Beräkna trippelintegralen

$$\iiint_K \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} dxdydz$$

där kroppen $K$ bestäms av olikheterna $x^2 + y^2 + z^2 \le 1, x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$.

Lösning: Kroppen ligger i första oktanten. Använd sfäriska koordinater dvs låt $x = r\sin\theta\cos\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = rcos\theta, dxdydz = r^2\sin\theta drd\phi d\theta, 0 < r \le 1, 0 \le \theta \le \phi/2, 0 < \phi \le \pi/2$. Olikheterna spänner upp kroppen $K'$.

$$\text{Integralen} = \iiint_{K'} \frac{r\sin\theta\cos\phi}{r^2+1} r^2 \sin\theta drd\theta d\phi =$$

$$= \int_0^1 \frac{r^3}{r^2+1} dr \int_0^{\pi/2} cos\phi d\phi \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta d\theta =$$

$$= \int_0^1 (r - \frac{r}{r^2+1} dr [sin\phi]_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} (\frac{1 - cos2\theta}{2} d\theta =$$

$$= \left[\frac{1}{2}(r^2 - \ln(r^2+1))\right]_0^1 \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{(1 - ln2)\pi}{8}$$