KTH Matematik

TENTAMENSSKRIVNING TISDAGEN 30/5 14.00-19.00

5B1141, ANALYTISKA METODER OCH LINJÄR ALGEBRA II FÖR ÖPPEN INGÅNG OCH IT-PROGRAMMET.

Uppgifterna 1-5 svarar mot varsin modul i den kontinuerliga examinationen. Av dessa uppgifter skall man enbart lösa dem som svarar mot de moduler man inte blivit godkänd på. Bedömning här är Godkänd/Underkänd. Uppgifterna 6-10 poängsätts med maximalt 4 poäng per uppgift.
Betygsgränser:
För betyg A och 5: godkänt på modul 1-5 och 14-20 poäng på uppgifterna 6-10
För betyg B och 4: godkänt på modul 1-5 och 11-13 poäng på uppgifterna 6-10
För betyg C och 4: godkänt på modul 1-5 och 8-10 poäng på uppgifterna 6-10
För betyg D och 3: godkänt på modul 1-5 och 5-7 poäng på uppgifterna 6-10
För betyg E och 3: godkänt på modul 1-5 och 3-4 poäng på uppgifterna 6-10
Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga lösningar och motiveringar. Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv tydligt program på omslaget. Lycka till!!!

1. För en linjär avbildning $\mathrm{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gäller att

$$\mathrm{A}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \text{ och } \mathrm{A}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\7\end{pmatrix}.$$

   Bestäm $\mathrm{A}\binom{4}{5}$.

2. Antag att $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ har kontinuerliga partiella derivator. Låt

$$h(x, y) = f\left(\frac{x}{y}, xy\right), y \neq 0.$$

   Bestäm

$$x\frac{\partial}{\partial x}h(x, y) + y\frac{\partial}{\partial y}h(x, y)$$

   som ett uttryck enbart innehållande f :s partiella derivator samt x och y.

3. Antar funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, där

$$f(x, y) = 24xye^{-x^2-4y^2},$$

   värdet 2?

4. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D e^{-y^2} dxdy$$

där området D i xy-planet bestäms av $|x| \leq y$ och $0 \leq y \leq 1$.

5. Låt K vara den solida cylinderbit som beskrivs av olikheterna $x^2 + y^2 \leq 2$ och $-3 \leq z \leq 3$. Beräkna flödet av fältet $\mathbf{u} = (xz, x^2y, yz)$ ut genom den totala begränsningsytan till K.

6. Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma (\pi \sin(\pi x) - y^2 e^{1-x})dx + (\pi \cos(\pi y) + 2ye^{1-x})dy$$

där γ är delen av ellipsen $4(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$ från punkten (2,1) till punkten (1,3) tagen i positiv riktning.

7. Visa att ekvationen

$$2xz + 5xy - z^3 = 35$$

i en omgivning av punkten $(3, 2, 1)$ definierar en funktion $z = z(x, y)$ sådan att $z(3, 2) = 1$. Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $z = z(x, y)$ i punkten $(3, 2, 1)$.

8. Beräkna arean av den del av ytan $x^2 - y^2 - 4z = 0$ som ligger innanför cylindern $x^2 + y^2 = 1$.

9. Låt A vara matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 8 & 4 \\ -4 & 5 & 2 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Bestäm matriser P och D så att $P^{-1}AP = D$, där D är en diagonalmatris, och använd resultatet till att beräkna A^n för alla positiva heltal n.

10. Beräkna trippelintegralen

$$\iiint_K \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} dxdydz$$

där kroppen K bestäms av olikheterna $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$.