Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark.

Tentamen och lösningsförslag till 5B1137 Reell analys för F1, 05–03–29, kl. 14.00–19.00.

- Inga hjälpmedel.
- Eftersom denna kurs är väldigt teoretisk förutsätts det att att du motiverar dina lösningar ordentligt med satser från boken!
- Poänggränser: Avgörs i samband med rättningen.

1. *Låt* $0 < a_0 < b_0$. *Visa först att*

$$\sqrt{a_0 b_0} < \frac{a_0 + b_0}{2}.$$

Definiera sedan

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}}, \quad b_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \quad \text{för} \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Visa till slut att $\lim_{n\to\infty} a_n$ *och* $\lim_{n\to\infty} b_n$ *finns, samt att dessa gränsvärden är lika!*

Lösning: Först ser vi att

$$0 \leq (\sqrt{b_0} - \sqrt{a_0})^2 = b_0 + a_0 - 2\sqrt{a_0 b_0} \iff \sqrt{a_0 b_0} < \frac{a_0 + b_0}{2}.$$

Härur följer det att

$$a_0 = \sqrt{a_0 \cdot a_0} < \sqrt{a_0 b_0} = \sqrt{a_1} < \frac{a_0 + b_0}{2} = b_1 < \frac{b_0 + b_0}{2} = b_0,$$

det vill säga,

$$a_0 < a_1 < b_1 < b_0.$$

Samma resonemang visar därefter att

$$a_0 < a_1 < a_2 < b_2 < b_1 < b_0,$$

och allmänt att

$$a_0 < a_1 < \cdots < a_n < \cdots < b_n < \ldots b_1 < b_0$$

för alla n.

Eftersom följden $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ således är växande och uppåt begränsad (av b_0 till exempel), finns $A = \lim_{n\to\infty} a_n$. Och då $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ är avtagande och nedåt begränsad finns $B = \lim_{n\to\infty} b_n$.

Om vi slutligen låter n gå mot ∞ i $b_n = (a_{n-1} + b_{n-1})/2$, så ser vi att $B = (A + B)/2 \iff A = B$.

2. *Beräkna*
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

Lösning: Idén är att betrakta $1/(n+k)$ som ytan av en rektangel med basen $= 1$ och höjden $= 1/(n+k)$.

Om rektangelns bas ligger mellan $k-1$ och k, så ser vi att rektanglarnas union för $k = 1, \ldots, n$ *ligger under* grafen av $y = 1/(n+x)$ för $0 \leq x \leq n$, varför
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} < \int_{x=0}^{n} \frac{dx}{n+x}.$$
Om istället rektangelns bas placeras mellan k och $k+1$, så ser vi att unionen av rektanglarna för $k = 1, \ldots, n$ *ligger över* grafen av $y = 1/(n+x)$ för $1 \leq x \leq n+1$, och då får vi istället
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} > \int_{x=1}^{n+1} \frac{dx}{n+x}.$$
Tillsammans får vi alltså
$$\int_{1}^{n+1} \frac{dx}{n+x} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} < \int_{0}^{n} \frac{dx}{n+x}.$$
Men dessa integraler låter sig lätt beräknas:
$$\begin{aligned}\int_{1}^{n+1} \frac{dx}{n+x} &= [\ln(n+x)]_1^{n+1} = \ln \frac{2n+1}{n+1} \\ &= \ln\left(2 \cdot \frac{n+1/2}{n+1}\right) = \ln 2 + \ln \frac{1+1/(2n)}{1+1/n} \to \ln 2 \text{ då } n \to \infty,\end{aligned}$$
och
$$\int_{0}^{n} \frac{dx}{n+x} = [\ln(n+x)]_0^n = \ln \frac{2n}{n} = \ln 2.$$
Insättning i olikheterna ovan ger sedan att
$$\ln 2 - \ln \frac{1+1/n}{1+1/(2n)} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} < \ln 2,$$
och då $n \to \infty$ visar instängningsprincipen att
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \ln 2.$$

3. *Låt* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *vara en Cauchyföljd av reella tal. Bevisa att* $\lim_{n\to\infty} a_n$ *finns genom att visa följande hjälpsatser:*

(a) *Varje Cauchyföljd är begränsad.*

(b) *Varje begränsad följd har en hopningspunkt.*

(c) *En hopningspunkt är gränsvärdet av en konvergent delföljd.*

(d) *Om en delföljd* $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *av en Cauchyföljd* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$*konvergerar mot ett gränsvärde* L*, så konvergerar hela Cauchyföljden mot* L*.*

Lösning: Se läroboken!

4. *Om* $y = f(x)$ *och* $x = g(t)$ *är deriverbara funktioner, så kan vi uppfatta* y *som en deriverbar funktion av* t*:*

$$y = f(g(t)) = f \circ g(t).$$

I denna situation säger kedjeregeln att

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = f'(g(t)) \cdot g'(t).$$

Standardbeviset för denna regel är följande: t *får ett tillskott* $\Delta t \implies x$ *får ett tillskott* $\Delta x = g(t+\Delta t) - g(t) \implies y$ *får ett tillskott* $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ *och*

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \frac{g(t+\Delta t) - g(t)}{\Delta t}$$
$$\to f'(x(t)) \cdot g'(t) \quad \text{då } \Delta t \text{ (och därmed } \Delta x) \to 0.$$

Det finns ett problem med detta argument, nämligen att nämnaren $\Delta x = g(t + \Delta t) - g(t)$ *kan ha nollställen då* Δt *är nära noll.*

Ge ett bättre bevis med hjälp av följande idé: Om

$$\epsilon(x, \Delta x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f'(x) \quad \text{då } \Delta x \neq 0,$$

så är uppenbarligen

$$\lim_{\Delta x \to 0} \epsilon(x, \Delta x) = 0.$$

Därmed inser vi att

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + \epsilon(x, \Delta x) \cdot \Delta x \text{ med } \lim_{\Delta x \to 0} \epsilon(x, \Delta x) = 0.$$

Skriv sedan $\Delta x = g(t+\Delta t) - g(t)$ *enligt samma mönster, sätt in i uttrycket ovan, och härled sedan kedjeregeln* utan att dividera med $\Delta x = g(t+\Delta t) - g(t)$.

Lösning: Med

$$\Delta x = g(t + \Delta t) - g(t) = g'(t) \cdot \Delta t + \epsilon_1(t, \Delta t) \cdot \Delta t,$$

där $\epsilon_1(t, \Delta t) \to 0$ när $\Delta t \to 0$, får vi

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\cdot\Delta x + \epsilon(x,\Delta x)\cdot\Delta x \\ &= f'(x)\cdot[g'(t)\cdot\Delta t + \epsilon_1(t,\Delta t)\cdot\Delta t] + \epsilon(x,\Delta x)\cdot[g'(t)\cdot\Delta t + \epsilon_1(t,\Delta t)\cdot\Delta t] \\ &= f'(x)\cdot g'(t)\cdot\Delta t + f'(x)\cdot\epsilon_1(t,\Delta t)\cdot\Delta t + \epsilon(x,\Delta x)\cdot g'(t)\cdot\Delta t \\ &\quad + \epsilon(x,\Delta x)\cdot\epsilon_1(t,\Delta t)\cdot\Delta t,\end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta t} &= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta t} \\ &= f'(x)g'(t) + f'(x)\epsilon_1(t,\Delta t) + \epsilon(x,\Delta x)g'(t) + \epsilon(x,\Delta x)\epsilon_1(t,\Delta t).\end{aligned}$$

Då Δt går mot noll, går också Δx mot noll, och vi får då

$$\frac{dy}{dt} = f'(x)\cdot g'(t) = f'(g(t))\cdot g'(t).$$

5. *Beräkna integralen*

$$\int_0^1 e^x\,dx$$

som gränsvärdet av en Riemannsumma (och inte med hjälp av en primitiv funktion!*).*

Lösning: Dela in intervallet $[0,1]$ i n lika stora delar:

$$0 = \frac{0}{n} < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1.$$

Undersumman hörande till denna indelning blir

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n} &= \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^k = \{\text{ enligt geometriska serien }\} \\ &= \frac{1}{n}\cdot\frac{1-e^{\frac{n}{n}}}{1-e^{\frac{1}{n}}} = \frac{1-e}{n(1-1-\frac{1}{n}-\frac{1}{2!}\frac{1}{n^2}-\dots)} = \frac{e-1}{1+\frac{1}{2!}\frac{1}{n}+\dots}.\end{aligned}$$

Härur ser vi att

$$\int_0^1 e^x\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n} = e-1.$$

6. *För en viss konstant a är integralen*

$$\int_0^\infty \left(\frac{2x}{x^2+1} - \frac{a}{2x+1}\right)dx$$

konvergent. Bestäm detta a-värde, och beräkna motsvarande integral.

Lösning: Eftersom den enda elaka punkten för integralen är övre gränsen ∞, sätter vi

$$\int_0^\infty \left(\frac{2x}{x^2+1} - \frac{a}{2x+1}\right) dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \left(\frac{2x}{x^2+1} - \frac{a}{2}\cdot\frac{1}{x+1/2}\right) dx.$$

Integralen från 0 till R beräknas till

$$\begin{aligned}
&\left[\ln(x^2+1) - a/2\cdot\ln(x+1/2)\right]_0^R \\
&= \ln(R^2+1) - \ln\left((R+1/2)^{a/2}\right) - \ln 1 + a/2\cdot\ln(1/2) \\
&= \ln\frac{R^2+1}{(R+1/2)^{a/2}} - \frac{a\ln 2}{2}.
\end{aligned}$$

Här är

$$\begin{aligned}
\frac{R^2+1}{(R+1/2)^{a/2}} &= \frac{R^2}{R^{a/2}}\cdot\frac{1+1/(R^2)}{(1+1/(2R))^{a/2}} \\
&= R^{(4-a)/2}\cdot(\text{ nånting som går mot 1 då } R\to\infty),
\end{aligned}$$

vilket gör att

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{R^2+1}{(R+1/2)^{a/2}}\right) =& \frac{4-a}{2}\cdot\ln R \\
&+ (\text{ nånting som går mot noll då } R\to\infty).
\end{aligned}$$

Vi ser då att integralen blir konvergent endast om $a=4$, och i detta fall får vi

$$\int_0^\infty \left(\frac{2x}{x^2+1} - \frac{4}{2x+1}\right) dx = -2\ln 2.$$

7. (a) *Visa att* $\sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n^2}$ *är likformigt konvergent på intervallet* $[-1,1]$.

   (b) *Visa att* $\sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n}$ *och* $\sum_{n=1}^\infty x^n$ *är likformigt konvergenta på varje intervall* $[-a,a]$ *där* $0\le a<1$.

   (c) *Visa att* $\sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n^2}$ *kan uttryckas som integralen av en viss elementär funktion på intervallet* $(-1,1)$.

   Lösning:

   (a) Då $|x|\le 1$ är $|x^n/n^2|\le 1/n^2$, och eftersom $\sum_{n=1}^\infty 1/n^2$ är konvergent (på grund av att $2>1$), så säger Weierstrass M-test att $\sum_{n=1}^\infty x^n/n^2$ är likformigt konvergent på $[-1,1]$.

   (b) Då $|x|\le a$, där $a<1$, är $|x|^n\le a^n$, och eftersom $\sum_{n=1}^\infty a^n$ är konvergent (på grund av geometriska serien), så säger Weierstrass M-test att $\sum_{n=1}^\infty x^n$ är likformigt konvergent på $[-a,a]$.
   $\sum_{n=1}^\infty x^n/n$ konvergerar förstås fortare än $\sum_{n=1}^\infty x^n$, och är därför också likformigt konvergent på $[-a,a]$.

(c) Theorem 22.6 säger att en potensserie kan deriveras termvis inuti det öppna konvergensintervallet. Så på intervallet $(-1, 1)$ får vi

$$\begin{aligned} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} &\Longrightarrow f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} \\ \Longrightarrow x \cdot f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} &\Longrightarrow (x \cdot f'(x))' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \\ = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \end{aligned}$$

där geometriska serien har använts på slutet. Eftersom $x = 0$ ger att $x \cdot f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$ är lika med noll, ger integration av $(x \cdot f'(x))'$ att

$$x \cdot f'(x) = -\ln(1-x) \Longrightarrow f'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}.$$

Observera att

$$\frac{-\ln(1-x)}{x} = \frac{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots}{x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \ldots$$

är snäll och väluppfostrad på hela intervallet $(-1, 1)$, och speciellt i origo!

Från $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n/n^2$ sluter vi att $f(0) = 0$. En sista integration ger därmed att

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\, dt.$$