Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark.

Tentamen och lösningsförslag till
5B1137 Reell analys för F1, 05–12–19, kl. 8.00–13.00.

- Inga hjälpmedel.
- Eftersom denna kurs är väldigt teoretisk förutsätts det att du motiverar dina lösningar ordentligt med satser från boken!
- Poänggränser för betygen: Avgörs i samband med rättningen.

1. *Låt $a > 1$. Visa att*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Det vill säga, " $n!$ växer fortare mot ∞ än a^n då $n \to \infty$".

Lösning: Om m är ett heltal som är större än a, så gäller följande när $n > m$:

$$\begin{aligned}\frac{a^n}{n!} &= \frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{m}\cdot\frac{a}{m+1}\cdots\frac{a}{n}\\ &= \frac{a^m}{m!}\cdot\frac{a}{m+1}\cdots\frac{a}{n}\\ &< \frac{a^m}{m!}\cdot\frac{a}{n} = \text{fixt tal} \quad \cdot\frac{a}{n}\\ &\to 0 \text{ då } n\to\infty.\end{aligned}$$

2. *Visa att*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-3/2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} = \frac{2}{3},$$

det vill säga att

$$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n} \approx \frac{2}{3}n\sqrt{n} \quad \text{då } n \text{ är stort.}$$

Lösning: Idéen består i att skriva $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$ som $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\cdot 1$, där $\sqrt{k}$ uppfattas som höjden och 1 som basen i en rektangel med ytan $\sqrt{k}$, och sedan jämföra summan av rektangelytorna med ytan mellan grafen av den växande funktionen $y=\sqrt{x}$ och x-axeln. Med hjälp av figurer (rita!) inser man dels att

$$\sqrt{1}\cdot 1+\sqrt{2}\cdot 1+\cdots+\sqrt{n}\cdot 1 > \int_0^n x^{1/2}\,dx = \frac{2}{3}\left[x^{3/2}\right]_0^n = \frac{2}{3}\cdot n^{3/2},$$

och dels att

$$\sqrt{1}\cdot 1+\sqrt{2}\cdot 1+\cdots+\sqrt{n}\cdot 1 < \int_0^{n+1} x^{1/2}\,dx = \frac{2}{3}\cdot (n+1)^{1/2}.$$

Tillsammans fås då att

$$\frac{2}{3}\cdot n^{3/2} < \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} < \frac{2}{3}\cdot (n+1)^{3/2},$$

eller

$$1 < \frac{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}}{\frac{2}{3}n\sqrt{n}} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{3/2}.$$

Om man nu låter $n\to\infty$ i den sista olikheten, så ser man att $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$ kläms ihop mellan värdena 1 och 1, så att

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}}{\frac{2}{3}n\sqrt{n}} = 1.$$

3. *Låt a och b vara positiva tal med $a<b$. Sätt $x_0=a$, $x_1=b$, och låt*

$$x_n = \textit{medelvärdet av } x_{n-2} \textit{ och } x_{n-1} = \frac{x_{n-2}+x_{n-1}}{2} \quad \textit{för n=2,3,}\ldots.$$

   (a) *Visa att $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ är en Cauchyföljd.*

   (b) *Beräkna* $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Lösning: Vi observerar först att skillnaden mellan x_{n-1} och x_n är liten för stora n:

$$\begin{aligned}
&x_n - x_{n-1} = \frac{1}{2}(x_{n-1}+x_{n-2}) - x_{n-1} = -\frac{1}{2}(x_{n-1}-x_{n-2})\\
&\Rightarrow |x_n - x_{n-1}| = \frac{1}{2}|x_{n-1}-x_n| = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}|x_{n-1}-x_{n-2}| = \ldots\\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|x_1-x_0| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(b-a).
\end{aligned}$$

Sedan måste vi visa att skillnden mellan x_n och x_m är liten då $n > m$ är stora tal:

$$\begin{aligned}
|x_n - x_m| &\le |x_n - x_{n-1}| + \cdots + |x_{m+1} - x_m| \\
&= \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{m} \right\} \cdot (b-a) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{m} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-m} \right) \cdot (b-a) \\
&< \left(\frac{1}{2}\right)^{m} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \cdot (b-a) = \left(\frac{1}{2}\right)^{m} \cdot \frac{1}{1-1/2} \cdot (b-a) \\
&\to 0 \text{ då } m \to \infty,
\end{aligned}$$

vilket visar att $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *är* en Cauchyföljd.

Därmed vet vi att $\lim_{n\to\infty} x_n$ *finns*, och det återstår att beräkna detta gränsvärde. Genom att resonera som i början ser vi att

$$\begin{aligned}
x_n - x_{n-1} &= -\frac{1}{2}(x_{n-1} - x_{n-2}) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 (x_{n-2} - x_{n-3}) = \cdots \\
&= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot (x_1 - x_0) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot (b-a),
\end{aligned}$$

varur följer att

$$\begin{aligned}
x_n &= (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \cdots + (x_1 - x_0) + x_0 \\
&= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} (b-a) + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} (b-a) + \cdots + (b-a) + a \\
&= a + (b-a) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k}.
\end{aligned}$$

Då $n \to \infty$ ser vi därmed att

$$x_n \to a + (b-a) \cdot \frac{1}{1+1/2} = a + (b-a) \cdot \frac{2}{3} = \frac{a}{3} + \frac{2b}{3}.$$

Observera: I och med att $\lim_{n\to\infty} x_n$ finns, så måste naturligtvis $\{x_n\}_0^{\infty}$ vara en Cauchyföljd, det vill säga (a) följer ur (b).

4. *Visa att*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \ldots$$

är konvergent, men inte absolutkonvergent.

Lösning: Vi har konvergens på grund av Cauchys test för alternerande serier, men inte absolutkonvergens eftersom

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad \text{är divergent då} \quad p \leq 1.$$

5. *Avgör för vilka värden på det reella talet a som integralen*

$$\int_0^1 \frac{e^t}{t^a}\,dt$$

är konvergent.

Lösning: Integralen är naturligtvis konvergent om $a \leq 0$. Då $a > 0$ är integralen är elak i vänstra ändpunkten $t = 0$, varför

$$\int_0^1 \frac{e^t}{t^a}\,dt = \lim_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^1 \frac{e^t}{t^a}\,dt,$$

om det senare gränsvärdet finns. Observera att $\int_\epsilon^1$ *växer* då $\epsilon \to 0$; det räcker därför att undersöka om $\int_\epsilon^1$ är *begränsad* då $\epsilon \to 0$. Notera först att

$$0 \leq t \leq 1 \Rightarrow 1 \leq e^t \leq e^1.$$

Låt oss betrakta fallen $a < 1$, $a = 1$ och $a > 1$ var för sig.

$a < 1$**:**

$$\int_0^1 \frac{e^t}{t^a}\,dt \leq e^1 \cdot \int_0^1 t^{-a}\,dt = e \cdot \lim_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^1 t^{-a}\,dt$$
$$= e \cdot \lim_{\epsilon \to 0} \left[\frac{t^{-a+1}}{-a+1} \right]_\epsilon^1 = \frac{e}{1-a} \cdot \lim_{\epsilon \to 0} \left(1 - \epsilon^{1-a}\right) = \frac{e}{1-a},$$

eftersom $1 - a > 0$.

$a = 1$**:**

$$\int_0^1 \frac{e^t}{t}\,dt > e^0 \cdot \int_0^1 \frac{1}{t}\,dt = \lim_{\epsilon\to 0}\,[\ln t]_\epsilon^1 = -\lim_{\epsilon\to 0}\ln\epsilon = +\infty.$$

$a > 1$**:**

$$\int_0^1 \frac{e^t}{t^a}\,dt > e^0 \cdot \int_0^1 t^{-a}\,dt = \frac{1}{-a+1}\lim_{\epsilon\to 0}\,[t^{-a+1}]_\epsilon^1$$
$$= \frac{1}{a-1}\cdot\left(\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon^{a-1}} - 1\right) = +\infty,$$

eftersom $a > 1$.

SLUTSATS: $\int_0^1 e^t \cdot t^{-a}\,dt$ är konvergent om och endast om $a < 1$.

6. *Låt $a > 0$. Beräkna integralen*

$$\int_0^a x^2\,dx$$

som gränsvärdet av en Riemansumma.

Ledning: $\sum_{k=1}^n k^2$ *kan beräknas genom att man summerar båda leden i identiteten*

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

från $k = 1$ till $k = n$.

Lösning: Med indelningen

$$0 < \frac{a}{n} < \frac{2a}{n} < \cdots \frac{na}{n} = a$$

av intervallet $[0, a]$ ser man att

$$\int_0^a x^2\,dx = \lim_{n\to 0}\sum_{k=1}^n \left(\frac{ka}{n}\right)^2 \cdot \frac{a}{n} = a^3 \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^n k^2,$$

och det återstår att beräkna $\sum_{k=1}^n k^2$. Vänsterledet i

$$\sum_{k=1}^n [(k+1)^3 - k^3] = 3\sum_{k=1}^n k^2 + 3\sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1$$

summeras till

$$\begin{aligned}&(n+1)^3 - n^3 + n^3 - (n-1)^3 + \cdots + 3^3 - 2^3 + 2^3 - 1^3\\&= (n+1)^3 - 1 = n^3 + 3n^2 + 3n,\end{aligned}$$

medan högerledet är lika med

$$\begin{aligned}&3 \cdot \sum_1^n k^2 + 3 \cdot \sum_{k=1}^n k + n = 3 \cdot \sum_1^n k^2 + 3 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + n\\&= 3 \cdot \sum_1^n k^2 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n.\end{aligned}$$

Jämför man dessa resultat så ser man att

$$\sum_1^n k^2 = \frac{1}{3}\left(n^3 + 3n^2 + 3n - \frac{3}{2}n^2 - \frac{5}{2}n\right) = \frac{1}{3}\left(n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\right).$$

Härur sluter man att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_1^n k^2 = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{3}{2}n^{-1} + \frac{1}{2}n^{-2}) = \frac{1}{3},$$

och därmed att

$$\int_0^a x^2\,dx = \frac{a^3}{3}.$$

7. (a) *Formulera den vanliga Rollesatsen, och illustrera den med en figur.*

   (b) *Visa följande sats:*
   Antag att $f''(x)$ finns på $[a, b]$, och att $f(a) = f'(a) = 0$, $f(b) = 0$. Då finns det ett tal c mellan a och b så att $f''(c) = 0$.

   (c) *Visa följande approximationssats:*
   Antag att $f''(x)$ finns i ett intervall I innehållande a. För varje $x \in I$ finns det då en punkt c mellan a och x så att

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c)}{2}(x-a)^2.$$

Lösning:

(a) Vanliga Rollesatsen säger följande:

$$f(x) \textit{ kontinuerlig på } [a,b], \textit{ deriverbar på } (a,b),$$
$$f(a) = f(b) = 0 \Rightarrow \textit{finns } c \in (a,b) \textit{ så att } f'(c) = 0.$$

(b) $f(a) = f(b) = 0 \Rightarrow$ finns $c_0 \in (a,b)$ så att $f'(c_0) = 0$; $f'(a) = f'(c_0) = 0 \Rightarrow$ finns $c \in (a, c_0)$ så att $f''(c) = 0$.

(c) Fixera ett $x \in I$. Låt C vara en konstant, som vi ska välja på ett lämpligt sätt senare, och betrakta andragradspolynomet

$$P(t) = f(a) + f'(a)(t-a) + C \cdot (t-a)^2.$$

Då är $P'(t) = f'(a) + 2C \cdot (t-a)$, så att

$$P(a) = f(a), \quad P'(a) = f'(a).$$

Vidare är $P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + C \cdot (x-a)^2$, vilket är lika med $f(x)$ om vi väljer C som

$$C = \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{(x-a)^2}.$$

Om vi sedan låter $g(t)$ vara skillnaden mellan $f(t)$ och $P(t)$, så ser vi att

$$\begin{aligned} g(t) &= f(t) - f(a) - f'(a)(t-a) - C \cdot (t-a)^2, \\ g'(t) &= f'(t) - f'(a) - 2C \cdot (t-a), \\ g''(t) &= f''(t) - 2C, \end{aligned}$$

och att $g(a) = g'(a) = g(x) = 0$, varför det enligt (b) finns något c mellan a och x så att $0 = g''(c) = f''(c) - 2C$. Detta betyder att

$$C = \frac{f''(c)}{2}.$$

Insättes detta värde i $f(x) = P(x)$, så ser vi till slut att

$$f(x) = P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c)}{2}(x-a)^2.$$