Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark.

Tentamen och lösningsförslag till 5B1137 Reell analys I för F1, 060602, kl. 8.00 – 13.00.

- **Inga hjälpmedel.**
- **Betygsgränser:** Sätts i efterhand. Resultatet av eventuella hemtal inverkar naturligtvis på betyget.

1. *Låt* $a_1 = \sqrt{7}$ *och* $a_n = \sqrt{7 + a_{n-1}}$ *då* $n \geq 2$. *Visa att* $\lim_{n\to\infty} a_n$ *finns och beräkna detta gränsvärde.*

   Lösning: Visa först påståendena $P_n\colon a_{n+1} > a_n$ med induktion.

   $P_1\colon a_2 = \sqrt{7 + \sqrt{7}} > \sqrt{7} = a_1$.

   $P_n \Longrightarrow P_{n+1}\colon a_{n+1} > a_n \Longrightarrow a_{n+2} = \sqrt{7 + a_{n+1}} > \sqrt{7 + a_n} = a_{n+1}$.

   Till slut: P_1 sant $\Longrightarrow P_2$ sant $\Longrightarrow P_3$ sant $\Longrightarrow \ldots$, det vill säga alla P_n gäller.

   Följden är uppåt begränsad av 5 till exempel, för om a_n vore större än 5 för något n så skulle

   $$\begin{aligned}(a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n) &= a_{n+1}^2 - a_n^2 = 7 + a_n - a_n^2 \\ &= 7 + 1/4 - (a_n - 1/2)^2 < 0 \Longrightarrow a_{n+1} < a_n\colon \text{FEL!}.\end{aligned}$$

   $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ växande och uppåt begränsad $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = A$ finns. Låter man $n \to \infty$ i $a_n = \sqrt{7 + a_{n-1}}$ så fås

   $$A = \sqrt{7 + A} \Longrightarrow A^2 - A - 7 = 0 \Longrightarrow A = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}.$$

   Då $A > 0$ fås till slut att

   $$A = \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1 + \sqrt{29}}{2}.$$

2. *Beräkna Abelsumman av* $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots$.

Påminnelse: Om $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ *då* $|x| < 1$ *och* $f(x)$ *är kontinuerlig i* $x = 1$*, så är Abelsumman av* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *lika med* $f(1)$.

Lösning: Vi vet från geometriska serien att

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x} \quad \text{då} \quad |x| < 1.$$

Eftersom potensserier kan deriveras termvis inom konvergensområdet visar detta att

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \dots = \frac{d}{dx}(x - x^2 + x^3 - x^4 + \dots) \\ &= \frac{d}{dx}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n\right) = -\frac{d}{dx}\frac{1}{1+x} = \frac{1}{(1+x)^2} \quad \text{då} \quad |x| < 1. \end{aligned}$$

Härur följer att Abelsumman är lika med $f(1) = 1/4$.

3. *Beräkna integralen*

$$\int_0^1 x \cdot |1 - 2x| \cdot e^{x(1-x)}\, dx.$$

Lösning:

$$\begin{aligned} &\int_0^1 x \cdot |1 - 2x| \cdot e^{x(1-x)}\, dx \\ &= \int_0^{1/2} x(1-2x)e^{x(1-x)}\, dx + \int_{1/2}^1 x(2x-1)e^{x(1-x)}\, dx \\ &\quad \{\text{sätt } x = 1 - t,\ t = 1 - x,\ dx = -dt \text{ i andra integralen } \} \\ &= \int_0^{1/2} t(1-2t)e^{t(t-1)}\, dt + \int_{1/2}^0 (1-t)(1-2t)e^{(1-t)t}\, d(-t) \\ &= \int_0^{1/2} (t + 1 - t)(1-2t)e^{t-t^2}\, dt = \int_0^{1/2} e^{t-t^2}(1-2t)\, dt \\ &= \left[e^{t-t^2}\right]_0^{1/2} = e^{1/4} - e^0 = e^{1/4} - 1. \end{aligned}$$

4. *Definiera den naturliga logaritmen genom*

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \quad \text{då } x > 0.$$

Visa utgående från detta att $\ln x$ *uppfyller logaritmlagarna*

(a) $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

(b) $\ln(1/a) = -\ln a$.

(c) $\ln(a^r) = r \ln a$ *då* $r \in \mathbb{Q}$.

Lösning: (a)

$$\ln(ab) = \int_1^{ab} \frac{dt}{t} = \int_1^{a} \frac{dt}{t} + \int_a^{ab} \frac{dt}{t} = \{u = \frac{t}{a},\ t = au,\ dt = a\,du\}$$
$$= \ln a + \int_1^b \frac{a\,du}{au} = \ln a + \ln b.$$

(b)

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{dt}{t} = 0 \Longrightarrow 0 = \ln\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) = \ln a + \ln \frac{1}{a} \Longrightarrow$$
$$\ln(1/a) = -\ln a.$$

(c) då m och n är heltal fås

$$\ln a = \ln\left((a^{1/n})^n\right) = n \cdot \ln(a^{1/n}) \Longrightarrow \ln a^{1/n}) = \frac{1}{n} \cdot \ln a \Longrightarrow$$
$$\ln(a^{m/n}) = \ln\left((a^{1/n})^m\right) = m \cdot \ln(a^{1/n}) = \frac{m}{n} \ln a.$$

5. *Antag att funktionerna* $\{u_n(x)\}_0^\infty$ *är kontinuerliga på intervallet* $[a, b]$, *och att*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k(x) \to f(x) \text{ likformigt där då } n \to \infty.$$

(a) *Visa att*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b u_k(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Lösning: Givet $\epsilon > 0$ finns $N = N(\epsilon)$ så att $|\sum_{k=0}^{n} u_k(x) - f(x)| < \epsilon$ för alla $x \in [a,b]$ då $n > N(\epsilon)$. Härav följer det att

$$\left| \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{n} u_k(x) - f(x) \right) dx \right| \leq \int_a^b \left| \sum_{k=0}^{n} u_k(x) - f(x) \right| dx$$
$$\leq \epsilon \cdot (b-a) \quad \text{då} \quad n > N(\epsilon).$$

(b) *Visa att* $\sum_{k=0}^{n} x^k$ *konvergerar likformigt mot* $(1-x)^{-1}$ *på varje intervall* $[-a, a]$ *där* $0 < a < 1$*, och använd detta för att visa att*

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Lösning: Vi har

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x} \quad \text{då} \quad |x| < 1.$$

Då $|x| \leq a$ är

$$\left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right| \leq \frac{a^{n+1}}{1-a} \to 0 \quad \text{då} \quad n \to \infty,$$

så givet $\epsilon > 0$ finns $N = N(\epsilon)$ så att

$$\left| \sum_{k=0}^{n} x^k - \frac{1}{1-x} \right| < \epsilon \quad \text{då} \quad |x| \leq a \quad \text{och} \quad n > N.$$

Genom att använda det som visats ovan fås sedan att

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-t^2)^n \, dt$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n} \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{då} \quad |x| < 1.$$

6. *Låt* $f(x)$ *vara en oändligt deriverbar funktion på* $\mathbb{R}$ *med egenskapen att*

$$f^{(n)}(x) \to L(x) \quad \textit{likformigt då } n \to \infty.$$

Visa att i så fall måste $L(x)$ vara en multipel av exponentialfunktionen.

Lösning: Vi har å ena sidan att

$$\int_a^x f^{(n)}\,dt = f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a) \to L(x) - L(a),$$

och å andra sidan, på grund av den likformiga konvergensen, att

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x f^{(n)}(t)\,dt = \int_a^x \lim_{n\to\infty} f^{(n)}\,dt = \int_a^x L(t)\,dt.$$

Således är $L(x) - L(a) = \int_a^x L(t)\,dt$; deriveras detta fås $L(x) = L'(x)$. *En* lösning är $L(x) = 0$ för alla x. Om $L(x) \neq 0$ är

$$\frac{L'(x)}{L(x)} = 1 \iff \ln|L(x)| = x + C \iff L(x) = \pm e^C \cdot e^x,$$

det vill säga $L(x) = \text{konstant} \cdot e^x$.

7. *Skriv om problemet*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{*}$$

som en integralekvation, och använd sedan denna för att definiera de successiva approximationerna i Picard's lösningsmetod av (*).

Beräkna därefter Picardapproximationen $y_3(x)$ till problemet

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 1 + y^2, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Lösning: Från (*) fås att

$$\begin{aligned} y(x) - y(x_0) &= \int_{x_0}^x \frac{dy}{dt}\,dt = \int_{x_0}^x f(t, y(t))\,dt \\ &\Longrightarrow y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(t, y(t))\,dt. \end{aligned}$$

Utgående från detta definieras Picardapproximationerna $y_n(x)$ av $y_0(x) = y_0$ och

$$y_n(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t))\,dt \quad \text{då} \quad n \geq 1.$$

För problemet

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 1 + y^2, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

fås $y_0 = 0$ och $y_n = \int_0^x (1 + y_{n-1}^2(t))\,dt$. Det vill säga:

$$\begin{aligned}
y_1 &= \int_0^x 1\,dt = x, \\
y_2 &= \int_0^x (1 + t^2)\,dt = x + \frac{x^3}{3}, \\
y_3 &= \int_0^x \left(1 + \left(t + \frac{t^3}{3}\right)^2\right) dt = \int_0^x \left(1 + t^2 + \frac{2t^4}{3} + \frac{t^6}{9}\right) dt \\
&= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{3 \cdot 5} + \frac{x^7}{7 \cdot 9}.
\end{aligned}$$