Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark.

Tentamen i 5B1137 Reell analys I för F1,
06-12-18, kl. 8.00 – 13.00.

- Inga hjälpmedel.
- Du som har klarat lappskrivning i ($i = 1, 2, 3$) har autaomatiskt klarat tal i.
- För godkänt betyg krävs att man klarat ungefär hälften av talen.

1. Låt S vara en begränsad delmängd av $\mathbb{R}$. Visa att $\sup S$ finns. *Ledning:* Upprepad intervallhalvering!

2. Antag att $f(x)$ är växande och uppåt begränsad då $x \geq 10$. Visa att
$$\lim_{x\to\infty} f(x)$$
finns.

3. Beräkna
$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$
för $n = 1, 2, 3, \ldots$. *Ledning:* Gör variabelbytet $x = \sin\theta$ och härled därefter en rekursionsformel för I_n med hjälp av partiell integration.

4. Låt $0 < b < a$. Genom att rotera cirkelskivan
$$(x-a)^2 + y^2 < b^2$$
runt y-axeln fås en så kallad *torus*. Visa att volymen av denna ges av
$$V = (\text{längden av medelpunktens väg}) \cdot \text{tvärsnittsarean} = 2\pi a \cdot \pi b^2.$$

5. Låt $a \in \mathbb{R}$. Skriv $(1+x)^a$ som ett MacLaurinpolynom av graden n plus en restterm, samt visa att resttermen $\to 0$ då $n \to \infty$ för varje $x \in (-1,1)$.

6. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+x+1} - \sqrt{\frac{1}{\sin(x^{-2})} + x} \right).$$

7. Låt

$$f_n(x) = \frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2}, \quad n = 1,2,3,\ldots, \quad \text{på} \quad [0,1].$$

Visa att funktionsföljden $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerar punktvist mot 0 då $n \to \infty$. Undersök sedan om konvergensen kanske till och med är likformig.

8. Betrakta funktionsserien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)}, \quad \text{där } x \geq 0.$$

(a) Visa att serien konvergerar punktvist då $x \geq 0$ och beräkna dess summa. *Ledning:* Med hjälp av partialbråksuppdelning kan man skriva serien så att den blir teleskoperande (det vill säga, de flesta termerna tar ut varandra).

(b) Visa att serien är likformigt konvergent på $[a,\infty)$ för varje $a > 0$, men inte likformigt konvergent på $[0,\infty)$.

Lycka till!
Olle.