Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark.

Lösningsförslag till 5B1137 Reell analys I för F1,
07-05-31, kl. 8.00 – 13.00.

- Inga hjälpmedel.
- Du som har klarat lappskrivning i ($i = 1, 2, 3$) har autaomatiskt klarat tal i.
- För godkänt betyg krävs att man klarat ungefär hälften av talen.

1. (a) *Låt $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara en följd av reella tal. Definiera vad som menas med att*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Lösning: $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \iff$ för varje $M > 0$ finns ett tal $N = N(M)$ så att $n > N \Longrightarrow a_n > M$.

(b) *Låt $a > 1$. Använd definitionen ovan för att visa att*

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \infty.$$

Lösning: $a > 1 \Longrightarrow a$ kan skrivas som $a = 1 + h$ med $h > 0$. Binomialsatsen visar att

$$a^n = (1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}h^2 + \cdots > nh.$$

Så $a^n > nh > M$ om $n > M/h$.

2. *Talföljden $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ är definierad på följande sätt:*

$$a_1 = 2 \quad \text{och} \quad a_{n+1} = \frac{2a_n - 1}{a_n} \text{ för } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Beräkna $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Lösning: Observera att *om* $A = \lim_{n\to\infty} a_n$ *finns*, så ger $n \to \infty$ att

$$A = \frac{2A-1}{A} \iff A^2 - 2A + 1 = 0 \iff A = 1.$$

Så om gränsvärdet finns måste det vara lika med 1. Eftersom $a_1 = 2$, $a_2 = 3/2$, $a_3 = 4/3$, … *gissar* vi att $a_n \searrow 1$. Låt oss först visa att $a_n > 1$ för alla n med hjälp av induktion.

Påstående P_n: $a_n > 1$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$.

(1) $a_1 = 2 > 1$ är sant.

(2) P_n sant $\Longrightarrow P_{n+1}$ sant:

$$a_n > 1 \iff \frac{1}{a_n} < 1 \Longrightarrow a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n} > 2 - 1 = 1.$$

(3) Ur (1) plus (2) följer det att P_n är sant för alla $n \geq 1$.

När vi nu vet att $a_n > 1$ ser vi att

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{2a_n - 1}{a_n} = \frac{a_n^2 - 2a_n + 1}{a_n} = \frac{(a_n-1)^2}{a_n} > 0,$$

så $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ är en *avtagande och nedåt begränsad följd* − vilket visar att $\lim_{n\to\infty} a_n$ finns. Och i så fall måste gränsvärdet vara lika med 1.

3. (a) *Förklara på enklast möjliga sätt varför serien*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$$

är konvergent.

Lösning:

$$a_n = \frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{1-1/n^2},$$

där

$$\frac{1}{1-1/n^2} \to 1 \text{ då } n \to \infty.$$

Så

$$b_n = \frac{1}{n^2} \Longrightarrow \frac{a_n}{b_n} \to 1 \text{ då } n \to \infty,$$

vilket enligt jämförelsesatsen medför att

$$\sum a_n \text{ är konvergent} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum b_n \text{ är konvergent.}$$

Men $2 > 1 \Longrightarrow \sum b_n$ konvergent, så också $\sum a_n$ är konvergent.

(b) *Beräkna denna series summa – till exempel med hjälp av partialbråksuppdelning.*

Lösning: Partialbråksuppdelning visar att

$$\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Därmed fås att

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2-1} =& \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots\right. \\
&\left. + \frac{1}{N-3} - \frac{1}{N-1} + \frac{1}{N-2} - \frac{1}{N} + \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) \\
&\to \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4} \text{ då } N \to \infty.
\end{aligned}$$

4. *Beräkna gränsvärdet*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x - \sin x)^2}{(\cosh x - 1)^3},$$

där $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$. *MacLaurinserierna för* $\sin x$ *och* e^x *antas vara kända, och behöver alltså inte härledas.*

Lösning:

$$\begin{aligned}
&x - \sin x = x - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \dots = \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5) \\
&\Longrightarrow \text{ täljaren } = \frac{x^6}{36} + \mathcal{O}(x^8).
\end{aligned}$$

$$\cosh x - 1 = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - 2)$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + 1 - x + \frac{x^2}{2!} + \cdots - 2\right) = \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)$$
$$\implies \text{nämnaren } = \frac{x^6}{8} + \mathcal{O}(x^8).$$

Därmed fås att

$$\frac{(x - \sin x)^2}{(\cosh x - 1)^3} = \frac{x^6/36 + \mathcal{O}(x^8)}{x^6/8 + \mathcal{O}(x^8)} = \frac{1/36 + \mathcal{O}(x^2)}{1/8 + \mathcal{O}(x^2)}$$
$$\to \frac{8}{36} = \frac{2}{9} \text{ då } x \to 0.$$

5. *Beräkna integralen*

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{x^3 + 1}.$$

Lösning: $x^3 + 1 = 0$ har roten $x = -1$. Division med $x + 1$ visar att

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1),$$

där

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}.$$

Partialbråksuppdelningssatsen visar då att

$$\frac{1}{x^3 + 1} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 - x + 1}.$$

Genom att göra liknämnigt och sedan identifiera koefficienterna framför de olika x-potenserna ser man att

$$\frac{1}{x^3 + 1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x - 2}{x^2 - x + 1}.$$

Här är

$$\frac{x - 2}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x - 1 - 3}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} - \frac{3/2}{x^2 - x + 1},$$

så att

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1/3}{x+1} - \frac{1}{6}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1/2}{(x-1/2)^2+3/4}.$$

Sista termen här kan skrivas som

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{4}{3}(x-\frac{1}{2})^2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2},$$

så till slut fås att

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{6}\left(\frac{2}{x+1} - \frac{2x-1}{x^2-x+1}\right) + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}.$$

Detta visar att

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C,$$

varför den sökta integralen blir

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1} &= \frac{1}{6}\cdot\lim_{R\to\infty}\ln\frac{(R+1)^2}{R^2-R+1} + \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(-1/\sqrt{3})\right)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}.\end{aligned}$$

6. *Låt a vara en positiv konstant. Beräkna volymen av den rotationskropp som fås genom att rotera grafen av funktionen*

$$y(x) = \int_0^\infty e^{-at}\sin(xt)\,dt, \quad -\infty < x < \infty,$$

runt x-axeln.

Lösning:

$$\begin{aligned}y(x) &= \operatorname{Im}\int_0^\infty e^{(-a+ix)t}\,dt = \operatorname{Im}\left[\frac{e^{-at+ixt}}{-a+ix}\right]_0^\infty\\ &= \operatorname{Im}\frac{1}{a-ix} = \operatorname{Im}\frac{a+ix}{a^2+x^2} = \frac{x}{a^2+x^2}\\ &\Longrightarrow V = \pi\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{(a^2+x^2)^2}\,dx = 2\pi\int_0^\infty\frac{x^2}{(a^2+x^2)^2}\,dx.\end{aligned}$$

Om θ är en vinkel i en rätvinklig triangel med motstående kateten lika med x, närliggande kateten lika med a och hypotenusan lika med $\sqrt{a^2+x^2}$, så gäller:

$$\begin{aligned} x = a\tan\theta &\Longrightarrow dx = \frac{a\,d\theta}{\cos^2\theta} \quad \text{och} \\ \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}} &\Longrightarrow \frac{1}{a^2+x^2} = \frac{\cos^2\theta}{a^2}. \end{aligned}$$

Med denna substitution fås

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{a^2\tan^2\theta \cdot \cos^4\theta}{a^4} \cdot \frac{a\,d\theta}{\cos^2\theta} \\ &= \frac{2\pi}{a} \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\, d\theta = \frac{2\pi}{a}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{2a}. \end{aligned}$$

7. (a) *Funktionerna $f_n(x)$ är definierade då $x > 0$ genom*

$$f_n(x) = \frac{2}{x^n + x^{-n}} \quad \text{för } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Visa att $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existerar punktvist*, och att $f(x)$ är kontinuerlig för alla $x > 0$ utom i $x = 1$.*

Lösning: Först ser vi att $f_n(1) = 1$ för alla n. Sedan gäller:

$$\begin{aligned} 0 < x < 1 &\Longrightarrow x^n \to 0 \text{ och } x^{-n} \to \infty \Longrightarrow f_n(x) \to 0, \\ 1 < x < \infty &\Longrightarrow x^n \to \infty \text{ och } x^{-n} \to 0 \Longrightarrow f_n(x) \to 0. \end{aligned}$$

Det vill säga

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{då } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{då } x = 1, \\ 0 & \text{då } x > 1. \end{cases} \qquad \textit{punktvist.}$$

(b) *Låt $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ vara en följd av kontinuerliga funktioner på intervallet (a, b), och antag att*

$$f_n(x) \to f(x) \quad \text{likformigt på } (a, b).$$

Visa att då är också $f(x)$ kontinuerlig på (a, b).

Lösning: Vi ska visa att för $x_0 \in (a,b)$ och för varje $\epsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ så att $|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0| < \epsilon$. $|f(x) - f(x_0|$ uppskattas genom

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &= |(f(x) - f_n(x)) + (f_n(x) - f_n(x_0)) + (f_n(x_0) - f(x_0))| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|.\end{aligned}$$

På grund av den likformiga konvergensen finns ett N så att

$$|f(x) - f_N(x)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{för alla } x \in (a,b),$$
$$\text{och speciellt är } |f_N(x_0) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Eftersom $f_N(x)$ är kontinuerlig finns ett $\delta > 0$ så att

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Så tillsammans fås att

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < 3 \cdot \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

8. *Syftet med detta tal är att visa hur man kan definiera* $\tan x$ *utan att förutsätta några kunskaper i trigonometri. Det är alltså* inte *tillåtet att använda sig av trigonometriska funktioner och deras inverser i deluppgifterna (a)–(e) nedan.*

   (a) *Visa att funktionen*

   $$A(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

   är väldefinierad för alla $x \in \mathbb{R}$ (det vill säga, integralen är konvergent då $x \to \pm\infty$) och att $A(x)$ är udda.

   Lösning: Då $x > 1$ är

   $$A(x) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} + \int_1^x \frac{dt}{1+t^2} < \int_0^1 dt + \int_1^x \frac{dt}{t^2},$$

   som är konvergent då $x \to \infty$ eftersom $2 > 1$.
   Vidare är

   $$A(-x) = \int_0^{-x} \frac{dt}{1+t^2} = \{u = -t\} = \int_0^x \frac{-du}{1+u^2} = -A(x).$$

(b) *Visa att $A(x)$ är strikt växande.*

Lösning:

$$A'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0.$$

(c) *Sätt*

$$p = 4 \cdot \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2},$$

och visa att $p < 4$.

Lösning:

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} < \int_0^1 dt = 1.$$

(d) *Visa att*

$$\int_1^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2},$$

och slut härur att

$$A(x) \to \pm\frac{p}{2} \quad \text{då} \quad x \to \pm\infty.$$

Lösning:

$$\int_1^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \{t = u^{-1},\ dt = -du/u^2\} = \int_1^0 \frac{\frac{-du}{u^2}}{1+\frac{1}{u^2}} = \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \frac{p}{4}$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\to\infty} A(x) = \int_0^1 + \int_1^\infty = \frac{p}{2}.$$

(e) *Eftersom $A(x)$ växer strikt från $-p/2$ till $p/2$ då x går från $-\infty$ till ∞ så finns inversfunktionen $y = T(x)$ på $(-p/2, p/2)$:*

$$y = T(x) \iff -\frac{p}{2} < y < \frac{p}{2} \text{ och } x = A(y).$$

Visa att $T'(x) = 1+T^2(x)$, och dra sedan slutsatsen att $T(x)$ växer strikt från $-\infty$ till ∞ då x växer från $-p/2$ till $p/2$.

Lösning: d/dx på $x = A(y) \Longrightarrow$

$$1 = A'(y) \cdot y'(x) = \frac{y'}{1+y^2} \Longrightarrow y' = 1 + y^2.$$

(f) *Eftersom $A(x)$ är udda är det tillräckligt att förstå denna funktion då $x \geq 0$.*

För att anknyta till trigonometrien beräknar vi $A(x)$ för icke-negativa x på följande sätt:

Inför vinkeln θ i en rätvinklig triangel med motstående kateten $= t$, närliggande kateten $= 1$ och hypotenusan $= \sqrt{1+t^2}$. Då är θ en funktion av t, nämligen $\theta(t) = \arctan t$. Vidare är

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ t = \tan\theta,\ \text{och}\ dt = \frac{d\theta}{\cos^2\theta}.$$

Visa att

$$A(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \theta(x) = \arctan x,$$

så att $T(x) = \tan x$. Visa dessutom att $p = \pi$ genom att se vad som händer med den rätvinkliga triangeln då den motstående kateten blir oändligt lång.

Lösning: $t = \tan\theta \Longrightarrow$

$$A(x) = \int_0^{\arctan x} \cos^2\theta \cdot \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \int_0^{\arctan x} d\,\theta = \arctan x.$$

Då den motstående kateten x går mot ∞, så går vinkeln $\theta(x)$ mot $\pi/2$, vilket innebär att

$$\frac{p}{2} = \lim_{x\to\infty} A(x) = \frac{\pi}{2}.$$