Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark.

Tentamen i 5B1137 Reell analys I för F1,
07-05-31, kl. 8.00 – 13.00.

- Inga hjälpmedel.
- Du som har klarat lappskrivning i ($i = 1, 2, 3$) har autaomatiskt klarat tal i.
- För godkänt betyg krävs att man klarat ungefär hälften av talen.

1. (a) Låt $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara en följd av reella tal. Definiera vad som menas med att
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$
   (b) Låt $a > 1$. Använd definitionen ovan för att visa att
$$\lim_{n\to\infty} a^n = \infty.$$

2. Talföljden $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ är definierad på följande sätt:
$$a_1 = 2 \quad \text{och} \quad a_{n+1} = \frac{2a_n - 1}{a_n} \text{ för } n = 1, 2, 3, \ldots$$
   Beräkna $\lim_{n\to\infty} a_n$.

3. (a) Förklara på enklast möjliga sätt varför serien
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$$
   är konvergent.
   (b) Beräkna denna series summa – till exempel med hjälp av partialbråksuppdelning.

4. Beräkna gränsvärdet
$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x-\sin x)^2}{(\cosh x - 1)^3},$$
där $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$. MacLaurinserierna för $\sin x$ och e^x antas vara kända, och behöver alltså inte härledas.

5. Beräkna integralen
$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}.$$

6. Låt a vara en positiv konstant. Beräkna volymen av den rotationskropp som fås genom att rotera grafen av funktionen
$$y(x) = \int_0^\infty e^{-at}\sin(xt)\,dt, \quad -\infty < x < \infty,$$
runt x-axeln.

7. (a) Funktionerna $f_n(x)$ är definierade då $x > 0$ genom
$$f_n(x) = \frac{2}{x^n + x^{-n}} \quad \text{för } n = 1, 2, 3, \ldots.$$
Visa att $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existerar *punktvist*, och att $f(x)$ är kontinuerlig för alla $x > 0$ utom i $x = 1$.

   (b) Låt $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ vara en följd av kontinuerliga funktioner på intervallet (a, b), och antag att
$$f_n(x) \to f(x) \quad \text{likformigt på } (a, b).$$
Visa att då är också $f(x)$ kontinuerlig på (a, b).

8. Syftet med detta tal är att visa hur man kan definiera $\tan x$ utan att förutsätta några kunskaper i trigonometri. Det är alltså *inte* tillåtet att använda sig av trigonometriska funktioner och deras inverser i deluppgifterna (a)–(e) nedan.

   (a) Visa att funktionen
$$A(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$
är väldefinierad för alla $x \in \mathbb{R}$ (det vill säga, integralen är konvergent då $x \to \pm\infty$) och att $A(x)$ är udda.

(b) Visa att $A(x)$ är strikt växande.

(c) Sätt

$$p = 4 \cdot \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2},$$

och visa att $p < 4$.

(d) Visa att

$$\int_1^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2},$$

och slut härur att

$$A(x) \to \pm\frac{p}{2} \quad \text{då} \quad x \to \pm\infty.$$

(e) Eftersom $A(x)$ växer strikt från $-p/2$ till $p/2$ då x går från $-\infty$ till ∞ så finns inversfunktionen $y = T(x)$ på intervallet $(-p/2, p/2)$:

$$y = T(x) \iff -\frac{p}{2} < y < \frac{p}{2} \text{ och } x = A(y).$$

Visa att $T'(x) = 1 + T^2(x)$, och dra sedan slutsatsen att $T(x)$ växer strikt från $-\infty$ till ∞ då x växer från $-p/2$ till $p/2$.

(f) Eftersom $A(x)$ är udda är det tillräckligt att förstå denna funktion då $x \geq 0$.

För att anknyta till trigonometrien beräknar vi $A(x)$ för icke-negativa x på följande sätt:

Inför vinkeln θ i en rätvinklig triangel med motstående kateten $= t$, närliggande kateten $= 1$ och hypotenusan $= \sqrt{1+t^2}$. Då är θ en funktion av t, nämligen $\theta(t) = \arctan t$. Vidare är

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \; t = \tan\theta, \; \text{och } dt = \frac{d\theta}{\cos^2\theta}.$$

Visa att

$$A(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \theta(x) = \arctan x,$$

så att $T(x) = \tan x$. Visa dessutom att $p = \pi$ genom att se vad som händer med den rätvinkliga triangeln då den motstående kateten blir oändligt lång.

Lycka till!
Olle.