Lösningar till Tentamen i 5B1138 Reell analys II 2004-06-01

1) a), b) Se boken.

2) Sätt $f(x,y) = x^2 + y + \sin xy$. Då är $\frac{\partial f}{\partial y} = 1 + x\cos xy$ och $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1 \neq 0$. Enligt implicita funktionssatsen är $f(x,y) = 0$ ekvivalent med $y = g(x)$ i en omgivning av $(0,0)$, där g är C^1 i en omgivning av $x = 0$. Deriverar vi $f(x,y) = 0$ implicit får vi

$$2x + y' + (xy' + y)\cos xy = 0$$

dvs. $y' = g'(x) = -(2x - y\cos xy)/(1 + x\cos xy)$.

Svar: $g'(x) = -(2x - y\cos xy)/(1 + x\cos xy)$.

3) Vi kan konstatera att $2xy \leq x^2 + y^2$, varför $x^2 - xy + y^2 + 1 \geq \frac{1}{2}(x^2+y^2) + 1 > 0$, så f har inga singulära punkter utan är C^1 i hela $\mathbb{R}^2$. Det följer också att ($r = \sqrt{x^2+y^2}$)

$$|f(x,y)| \leq \frac{|3x+2|}{(x^2+y^2)/2+1} \leq \frac{3r+2}{r^2/2+1} \to 0$$

då $r \to \infty$. Vi söker kritiska punkter till f. Detta ger ekvationerna

$$\frac{3}{x^2 - xy + y^2 + 1} - \frac{(3x+2)(2x-y)}{(x^2 - xy + y^2 + 1)^2} = 0,$$

$$-\frac{(3x+2)(2y-x)}{(x^2 - xy + y^2 + 1)^2} = 0.$$

Den första ekvationen ger $-3x^2 + 3y^2 + 3 - 4x + 2y = 0$ och den andra $x = -3/2$ eller $x = 2y$. Insatt i den första ekvationen ger detta $y^2 + 2y/3 + 3/4 = 0$, som saknar reella lösningar, resp. $y^2 + 2y/3 - 1/3 = 0$, som har lösningarna $y = -1$ och $y = 1/3$. Kritiska punkter är $(-2,-1)$ och $(2/3, 1/3)$. Nu är $f(-2,-1) = -1/2$ och $f(2/3, 1/3) = 3$.

Svar: Värdemängden är $[-1/2, 3]$.

4) Eftersom $\mathbb{R}^2$ är enkelt sammanhängande är ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att F ska vara konservativt i $\mathbb{R}^2$ att $\frac{\partial}{\partial x}(bx^2y^2) = \frac{\partial}{\partial y}(xy^a)$, dvs $2bxy^2 = axy^{a-1}$ för alla (x,y). Detta ger $a = 3$ och $b = 3/2$. Vi söker en potential ϕ. $\frac{\partial \phi}{\partial x} = xy^3$ ger $\phi(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^3 + g(y)$, vilket ger $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{3}{2}x^2y^2 + g'(y)$, dvs. $g(y) = C$. Vi kan välja $C = 0$, så att $\phi(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^3$. Linjeintegralen ges nu av $\phi(1,2) - \phi(0,0) = 4$.

Svar: $a = 3, b = 3/2$; linjeintegralen=4.

5) En parametrisering av kurvan ges av $x = a\cos\theta$, $y = b\cos\theta$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Enligt

definitionen blir linjeintegralen

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} ab\cos\theta\sin\theta\sqrt{(-a\sin\theta)^2+(b\cos\theta)^2}d\theta \\ &= ab\int_0^{\pi/2} \cos\theta\sin\theta\sqrt{(a^2-b^2)\sin^2\theta+b^2}d\theta. \end{aligned}$$

Variabelbytet $t=\sin\theta$ ger

$$\begin{aligned} I &= ab\int_0^1 t\sqrt{(a^2-b^2)t^2+b^2}dt = ab\left[\frac{1}{3(a^2-b^2)}((a^2-b^2)t^2+b^2)^{3/2}\right]_0^1 \\ &= \frac{ab}{3(a^2-b^2)}(a^3-b^3) = \frac{ab}{3(a+b)}(a^2+ab+b^2). \end{aligned}$$

Svar: $\frac{ab}{3(a+b)}(a^2+ab+b^2)$.

6) Övergång till polära koordinater ger att integralen ges av

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R\left(\int_0^{2\pi} r^3\cos^2\theta e^{-r}d\theta\right)dr = \pi\lim_{R\to\infty}\int_0^R r^3e^{-r}dr = 6\pi.$$

Svar: 6π.

7) En parametrisering av ellipsen ges av $\mathbf{r}(t)=(a\cos t, b\sin t, 0)$, $0\le t\le 2\pi$ om vi ser den som en kurva i $\mathbb{R}^3$. derivering ger $\mathbf{r}'(t)=(-a\sin t, b\cos t, 0)$ och $\mathbf{r}''(t)=(-a\cos t, -b\sin t, 0)$ vilket ger $||\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)||=ab$, och $||\mathbf{r}'(t)||=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}$. Krökningen ges alltså av

$$\kappa(t)=\frac{ab}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{3/2}}.$$

Denna blir maximal när $a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t=(a^2-b^2)\sin^2 t+b^2$, är minimal, vilket inträffar då $\sin^2 t=0$, dvs. $t=0$ eller $t=\pi$, dvs. i punkterna $(\pm a,0)$. Den maximala krökningen blir $ab/b^3=a/b^2$.

Svar: Den maximala krökningen är a/b^2.

8) Låt Ω vara cylindern $x_1^2+x_2^2\le 1$, $a\le x_3\le b$. Enligt Gauss' sats gäller då

$$\iint_{\partial\Omega}\operatorname{curl}\mathbf{v}\cdot\mathbf{N} = \iiint_{\Omega}\operatorname{div}(\operatorname{curl}\mathbf{v})dV = 0,$$

eftersom div(curl)=0. Låt D_a vara cirkelskivan $x_1^2+x_2^2\le 1$, $x_3=a$. Eftersom $\partial\Omega=\mathcal{S}+D_a+D_b$ räcker det att visa att

$$\iint_{D_a}\operatorname{curl}\mathbf{v}\cdot\mathbf{N}+\iint_{D_b}\operatorname{curl}\mathbf{v}\cdot\mathbf{N}=0. \tag{1}$$

Vi ser att

$$\iint_{D_a} \operatorname{curl}\mathbf{v}\cdot\mathbf{N}dS = -\iint_{D_a}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}-\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)dS$$

och

$$\iint_{D_b} \operatorname{curl}\mathbf{v}\cdot\mathbf{N}dS = \iint_{D_b}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}-\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)dS$$

Eftersom v_1 och v_2 ej beror på x_3 är de båda integralerna i de högra leden lika och vi ser att (1) gäller.

9) De givna relationerna ger

$$\frac{\partial F_3}{\partial y}=\frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z}=\frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x}=\frac{\partial F_1}{\partial y}$$

och

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}=0.$$

Den sista relationen ger

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 F_2}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 F_3}{\partial x\partial z}=-\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2},$$

dvs. $\Delta F_1=0$, där vi utnyttjat de första relationerna i den andra likheten. $\Delta F_2 = \Delta F_3 = 0$ visas analogt.