Institutionen för matematik, KTH
Kurt Johansson, Avd. Matematik

TENTAMEN 5B1138
Reell analys II för F1
Tisdagen 1/6 2004, kl. 08-13

Hjälpmedel: Inga.

Instruktioner: Tentamen består av 9 uppgifter. Maximal poäng på varje uppgift framgår nedan. Maximal poäng på hela provet är 42p. Utöver detta kan du ha upp till 4 bonuspoäng. 21 p ger säkert godkänt (betyg 3), 28 p ger säkert betyg 4 och 35 p ger säkert betyg 5 , inklusive bonuspoäng. För poäng krävs väl motiverade lösningar.

1. (a) Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ och låt $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vara en enhetsvektor. Definiera vad som menas med den riktade derivatan $D_{\mathbf{v}}f(a)$ av f i $a \in \mathbb{R}^n$ i riktningen $\mathbf{v}$. (2p)

   (b) Visa att om f är C^1 i $a \in \mathbb{R}^n$ så existerar $D_{\mathbf{v}}f(a)$ för varje enhetsvektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ och
   $$D_{\mathbf{v}}f(a) = \nabla f(a) \cdot \mathbf{v}.$$
   (2p)

2. Genom ekvationen
   $$x^2 + y + \sin xy = 0 \tag{1}$$
   definieras en funktion g i en omgivning av $x = 0$, så att (1) är ekvivalent med $y = g(x)$ i en omgivning av $(0, 0)$. Visa detta och bestäm $g'(x)$ uttryckt i x och y. (4p)

3. Bestäm värdemängden till funktionen
   $$f(x, y) = \frac{3x + 2}{x^2 - xy + y^2 + 1},$$
   om $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. (5p)

4. Bestäm alla reella tal a och b så att vektorfältet $\mathbf{F}(x, y) = (xy^a, bx^2y^2)$ blir konservativt i $\mathbb{R}^2$. Beräkna, för dessa värden på a och b, linjeintegralen $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, där $\mathcal{C}$ är en kurva från $(0, 0)$ till $(1, 2)$. (5p)

5. Beräkna $\int_{\mathcal{C}} xy\,ds$ om $\mathcal{C}$ är den del av ellipsen $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $a > b > 0$, som går från $(a, 0)$ till $(0, b)$. (5p)

6. Beräkna integralen

$$\iint_{\mathbb{R}^2} x^2 e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy.$$

(4p)

7. Visa att ellipsen $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $a > b > 0$, har maximal krökning i punkterna $(\pm a, 0)$, och ange den maximala krökningen. *Ledning*: Krökningen $\kappa(t)$ i punkten $\mathbf{r}(t)$ till en slät kurva $t \to \mathbf{r}(t)$ i $\mathbb{R}^3$ ges av $\kappa(t) = ||\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)||/||\mathbf{r}'(t)||^3$. (5p)

8. Låt $\mathcal{S}$ vara cylinderytan $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\ ;\ x_1^2 + x_2^2 = 1, a \leq x_3 \leq b\}$, där a och b, $a < b$ är givna reella tal, och låt $\mathbf{N}$ vara den yttre normalen. Visa att

$$\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl}\mathbf{v} \cdot \mathbf{N}\,dS = 0$$

om $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ är ett C^2 vektorfält där v_1 och v_2 är oberoende av x_3.

(5p)

9. Vektorfältet $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ är C^2 och både divergens- och rotationsfritt, dvs. $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$ och $\operatorname{curl}\mathbf{F} = 0$, i det öppna området Ω. i $\mathbb{R}^3$. Visa att F_1, F_2 och F_3 är harmoniska funktioner i Ω.

LYCKA TILL!