Institutionen för matematik, KTH
Kurt Johansson, Avd. Matematik

TENTAMEN 5B1138
Reell analys II för F1
Onsdagen 25/8 2004, kl. 14-19

Hjälpmedel: Inga.

Instruktioner: Tentamen består av 9 uppgifter. Maximal poäng på varje uppgift framgår nedan. Maximal poäng på hela provet är 42p. Utöver detta kan du ha upp till 4 bonuspoäng. 21 p ger säkert godkänt (betyg 3), 28 p ger säkert betyg 4 och 35 p ger säkert betyg 5 , inklusive bonuspoäng. För poäng krävs väl motiverade lösningar.

1. (a) Definiera vad som menas med att funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ har partiella derivator i punkten $a \in \mathbb{R}^n$. (2p)

   (b) Ge ett exempel på en funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vars båda partiella derivator i $(0, 0)$ existerar, men som inte är kontinuerlig i origo. (2p)

2. Bestäm största och minsta värdet av funktionen $f(x, y) = 3 + x - x^2 - y^2$ i området $2x^2 + y^2 \leq 1$. (4p)

3. Bestäm en funktion $f(z)$ sådan att vektorfältet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(z)(2xz, 2yz, z^2 - x^2 - y^2)$$

   är konservativt i $\{(x, y, z)\,;\, z > 0\}$ och bestäm en potential. (5p)

4. Låt $\mathbf{N}$ vara den yttre normalen till paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$ och låt $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, xz^2, x^2y)$. Beräkna

$$\iint \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$$

   över den del av paraboloiden där $x \geq 0$ och $z \geq 0$. (5p)

5. Beräkna integralen

$$\iint_D (1 + x^2 + xy + y^2)^{-2} dxdy$$

   om $D = \{(x, y)\,;\, x^2 + xy + y^2 \leq 1\}$. (5p)

6. Funktionen $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definieras av

$$F(y) = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + y}.$$

a) Visa att F är deriverbar och beräkna $F'(y)$ då $y > 0$. (3p)

b) Använd resultatet i a) för att beräkna

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1 + x^2)^2}.$$

(2p)

7. Vektorfälten $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ uppfyller ekvationerna (Maxwells ekvationer i vakuum)

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \quad , \quad \operatorname{curl} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad , \quad \operatorname{curl} \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

i $\mathbb{R}^3$. Visa att $\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \Delta \mathbf{E}$ (denna ekvation skall förstås komponentvis). (4p)

8. Visa att i cylindriska koordinater så ges Laplace ekvation, $\Delta u = 0$, $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, av

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

(5p)

9. Antag att $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är C^3 i en omgivning av $a \in \mathbb{R}^n$, att $\nabla f(a) = 0$ och att Hessianen, dvs matrisen $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j})_{i,j=1}^n$ är positivt definit i a. Visa att f har ett lokalt minimum i a. (5p)

LYCKA TILL!