Lösningar till Tentamen i 5B1138 Reell analys II 2005-04-25

1) a) Se boken s. 718.

b) T. ex. $f(x,y) = 2xy/(x^2+y^2)$, då $(x,y) \neq (0,0)$ och $f(0,0) = 0$. Då är f begränsad, ty $|2xy| \leq x^2+y^2$. Eftersom f är en rationell funktion är det klart att den är kontinuerlig utanför origo. Observera att $f(0,x) = f(x,0) = 0$ för alla x så båda partiella derivatorna existerar trivialt. Däremot gäller att $f(x,x) = 1$ om $x \neq 0$, varför f ej är kontinuerlig i origo.

2) Vi bestämmer de största och minsta värdena för f i området. Eftersom området, en ellipsskiva, är sammanhängande och kompakt, samt f är kontinuerlig, så antar f alla värden mellan minsta och största värdet, och dessa värden antas någonstans i området. Betrakta först kritiska punkter. $\frac{\partial f}{\partial x} = 1-2x = 0$ ger $x = 1/2$ och $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y = 0$ ger $y = 0$. Punkten $(0,1/2)$ ligger inuti ellipsen; $f(0,1/2) = 13/4$. Vi måste också studera f på randen. $y^2 = 1-2x^2$ ger $g(x) = 3+x-x^2-(1-2x^2) = 2+x+x^2$, där $x \in [-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$. $g'(x) = 0$ ger $x = -1/2$, vilket ger $y = \pm 1/\sqrt{2}$; $f(-1/2, \pm 1/\sqrt{2}) = 7/4$. Återstår att betrakta ändpunkterna till x-intervallet, $x = \pm 1/\sqrt{2}$. Detta ger $y = 0$ och $f(1/\sqrt{2}, 0) = 5/2 + 1/\sqrt{2}$, $f(-1/\sqrt{2}, 0) = 5/2 - 1/\sqrt{2}$. Vi ser att $7/4 < 5/2 - 1/\sqrt{2}$ och att $5/2 + 1/\sqrt{2} < 13/4$.

Svar: Värdemängden är $[7/4, 13/4]$.

3) Villkoret $\mathbf{F} = \operatorname{grad}\phi$ ger ekvationerna

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2xzf(z), \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 2yzf(z), \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = f(z)(z^2-x^2-y^2).$$

Integration av den första ekvationen ger $\phi = (x^2+y^2)zf(z) + g(y,z)$ för någon funktion $g(y,z)$. Den andra ekvationen ger nu $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$, dvs. $g(y,z) = h(z)$ för någon funktion h. Deriverar vi vår formel för ϕ och sätter in i (3) får vi

$$(x^2+y^2)(f(z)+zf'(z)) + h'(z) = z^2 f(z) - (x^2+y^2)f(z).$$

Dett är uppfyllt om $h'(z) = z^2 f(z)$ och $2f(z) + zf'(z) = 0$. Detta kan skrivas $f'(z) + \frac{2}{z}f(z) = 0$ och vi ser att detta är uppfyllt om $f(z) = C/z^2$. Välj $C = 1$ och vi får $h'(z) = 1$, vilket ger att $h(z) = z$ är ett möjligt val. Med detta val av $f(z)$ blir $\mathbf{F}$ konservativt med potential $\phi(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)/z$.

Eftersom $\mathbf{F}$ är konservativt i D så är kurvintegralen I lika med skillnaden i potential i de två ändpunkterna, $I = \phi(1,1,2) - \phi(1,0,1) = 1$

Svar: Vi kan ta $f(z) = 1/z^2$ och en potential ges då av $\phi(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)/z$. Den sökta kurvintegralen $= 1$.

4) Sätter vi $x = u/\sqrt{a}$, $y = y/\sqrt{b}$ ser vi att den sökta integralen I kan skrivas

$$I = \frac{1}{\sqrt{ab}} \iint_{D'} (1 + u^2 + v^2)^{-2} dudv,$$

där$D' = \{u^2 + v^2 \leq 1\}$. Vi kan nu byta till polära koordinater och få

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\sqrt{ab}} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (1 + r^2)^{-2} r dr \right) d\theta \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{ab}} \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{r^2 + 1} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}}. \end{aligned}$$

Svar: $\frac{\pi}{2\sqrt{ab}}$.

5) Enligt Stokes' sats är

$$\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \int_{\partial \mathcal{S}} xy dx + xz^2 dy + x^2 y dz.$$

Här skall $\partial\mathcal{S}$ genomlöpas i positiv led sedd från spetsen av $\mathbf{N}$. Randekurvan $\partial\mathcal{S}$ består dels av halvcirkeln $\mathcal{C}_1$: $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $x \geq 0$, genomlöpt så att y växer, dels av parabelbågen $\mathcal{C}_2$: $z = 1 - y^2$, $x = 0$, $z \geq 0$, genomlöpt så att y avtar. På $\mathcal{C}_2$ är $x = 0$ så alla komponenter i vektorfältet $= 0$ varför integralen längs denna del $= 0$. Parametrisering av $\mathcal{C}_1$ ger

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{C}_1} xy dx + xz^2 dy + x^2 y dz = \int_{\mathcal{C}_1} xy dx = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta (-\sin\theta) d\theta = -\left[\frac{\sin^3\theta}{3} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Svar: $-\frac{2}{3}$.

6) En utåtriktad enhetsnormal $\mathbf{N}$ till $\mathcal{S}$ ges av $\mathbf{N} = (x_1, x_2, x_3)$. Integralen kan därför skrivas

$$I = \int_{\mathcal{S}} \operatorname{grad} f \cdot \mathbf{N} dS = \int_B \operatorname{div} (\operatorname{grad} f) dV = \int_B \Delta f dV,$$

där B är enhetsklotet $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1$. Här har vi använt Gauss' sats. En räkning ger $\operatorname{div}(f \operatorname{grad} f) = ||\operatorname{grad} f||^2 + f\Delta f$. Våra antaganden ger nu $10f = 4f + f\Delta f$, varur $\Delta f = 6$, eftersom $f \neq 0$. Insatt i formeln för I ovan ger detta $I = \int_B 6dV = 8\pi$.

Svar: 8π

7) a) Eftersom $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$ för varje vektorfält $\mathbf{F}$ ger ekvationen $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) - k^2\mathbf{A} = 0$ att $k^2 \nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})) = 0$. Då $k \neq 0$ ger detta $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$.

b) Vi vet enligt a) att $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, dvs vi har relationen

$$\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} = 0.$$

Första komponenten i $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$ ges av

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 A_2}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial x_1 \partial x_3} \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}\right) - \frac{\partial^2 A_1}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial x_3^2} \\
&= -\frac{\partial^2 A_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial x_3^2} = -\Delta A_1,
\end{aligned}$$

där vi utnyttjat relationen ovan. Första komponenten i ekvationen $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) - k^2 \mathbf{A} = 0$ är därför $-\Delta A_1 - k^2 A_1 = 0$. På samma sätt visas $\Delta A_i + k^2 A_i = 0$ för $i = 2, 3$.

8) Enligt satsen om diagonalisering av kvadratiska former kan vi välja nya koordinater $y_1, \ldots, y_n$ så att Q i de nya koordinaterna får formen

$$Q(y_1, \ldots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

där alla egenvärden $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ är > 0 eftersom Q är positivt definit. Det gäller att $||x|| = ||y||$ etersom variablelbytet $x = Oy$ ges av en ortogonal matris O. I de nya koordinaterna får vi (vi använder samma beteckning för funktionerna)

$$f(y) = f(0) + Q(y) + ||y||^2 R(y).$$

Nu gäller

$$Q(y) \geq \lambda_1 (y_1^2 + \cdots + y_n^2) = \lambda_1 ||y||^2,$$

varför

$$f(y) - f(0) \geq (\lambda_1 - R(y))||y||^2$$

för små $||y||$. Om $||y||$ är tillräckligt litet gäller $|R(y)| \leq \lambda_1/2$, ty $R(y) \to 0$ då $||y|| \to 0$. Alltså

$$f(y) - f(0) \geq \frac{\lambda_1}{2}||y||^2 > 0$$

om $y \neq 0$ och $||y||$ är litet. Detta inebär att f har ett lokalt minimum i 0.