Institutionen för matematik, KTH
Kurt Johansson, Avd. Matematik

**TENTAMEN 5B1138**
**Reell analys II för F1**
Lördagen 27/8 2005, kl. 14-19

*Hjälpmedel:* Inga.

*Instruktioner:* Tentamen består av 8 uppgifter. Maximal poäng på varje uppgift framgår nedan. Maximal poäng på hela provet är 42p. Utöver detta kan du ha upp till 4 bonuspoäng. 21 p ger säkert godkänt (betyg 3), 28 p ger säkert betyg 4 och 35 p ger säkert betyg 5 , inklusive bonuspoäng. För poäng krävs väl motiverade lösningar.

1. (a) Låt $\Omega$ vara en öppen mängd i $\mathbb{R}^2$. Definiera vad som menas med att ett vektorfält $\mathbf{F} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ är konservativt. (2p)

   (b) Ge ett nödvändigt och tillräckligt villkor på ett kontinuerligt deriverbart vektorfält $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ för att det skall vara konservativt, och bevisa att villkoret är nödvändigt (2p)

   (c) Är vektorfältet
   $$\mathbf{F} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$
   konservativt i hela $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$? (2p)

2. (a) Visa att arean av ellipsen $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ är $\pi ab$, där $a, b > 0$. (2p)

   (b) Använd Lagrangemultiplikatorer för att bestämma den ellips $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ med minimal area som innehåller rektangeln $[-1, 1] \times [-2, 2]$. (4p)

3. Låt $f(t)$ vara en kontinuerligt deriverbar och strikt avtagande funktion på $\mathbb{R}$. Visa att ekvationen
   $$x + y + z = f(x^3 + y^3 + z^3) \tag{1}$$

v.g.v.

definierar en kontinuerligt deriverbar funktion $z = z(x, y)$ i någon omgivning av varje punkt $(x, y, z)$ som löser (1). Visa också att $z(x, y)$ satisfierar

$$(y^2 - z^2)\frac{\partial z}{\partial x} + (z^2 - x^2)\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 - y^2.$$

(5p)

4. Låt $D = \{(x, y) \,;\, |x| + |y| \leq a\}$, där $a > 0$ är en konstant. Beräkna integralen
$$\iint_D e^{x+y}\,dxdy.$$
(5p)

5. Låt $\mathbf{F}$ och $\mathbf{G}$ vara två konservativa kontinuerligt deriverbara vektorfält på $\mathbb{R}^3$. Visa att vektorfältet $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$ är källfritt, dvs. $\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = 0$, och bestäm en vektorpotential till $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$. (5p)

6. Ytan $\mathcal{S}$ är en slät, orienterad randyta till kroppen $K$ i $\mathbb{R}^3$. Hur ska $\mathcal{S}$ väljas så att vektorfältet
$$\mathbf{F} = (4x + 2x^3 z, -y(x^2 + z^2), -3x^2 z^2 - 4y^2 z)$$
får maximalt flöde genom $\mathcal{S}$? (5p)

7. Låt $\kappa(s)$ beteckna krökningen som funktion av båglängden $s$ för en kurva i $\mathbb{R}^3$. Antag att $\kappa(s) = 0$ föra alla $s \geq 0$. Visa att kurvan är en (del av) en rät linje. (5p)

8. Låt $S(a, r)$ beteckna sfären i $\mathbb{R}^3$ med centrum i $a$ och radie $r$, och låt $\mathbf{N}$ vara den utåtriktade enhetsnormalen till $S(a, r)$. Antag att $\mathbf{F}$ är ett kontinuerligt deriverbart vektorfält i en omgivning av punkten $a$. Visa att
$$\lim_{r \to 0+} \frac{1}{4\pi r^3/3} \iint_{S(a,r)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\,dS = \operatorname{div} \mathbf{F}(a).$$
(5p)

LYCKA TILL!