Lösningar till Tentamen i 5B1138 Reell analys II 2006-05-19

1) Vi undersöker först när origo är en kritisk punkt till f. Derivering ger $\frac{\partial f}{\partial x} = 12x^2 + 2axy + y^2 + 8ax + a^2y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = ax^2 + 2xy + a^2x + 2ay$. Vi ser att $(0,0)$ är en kritisk punkt för alla a. Hessianen ges av

$$\begin{pmatrix} 24x + 2ay + 8a & 2ax + 2y + a^2 \\ 2ax + 2y + a^2 & 2x + 2a \end{pmatrix}.$$

Sätter vi in $(x, y) = (0, 0)$ får vi att determinanten är $16a^2 - a^4$ och spåret $10a$. Om $0 < a < 4$ är båda dessa > 0 och Hessianen positivt definit, vilket ger att är origo en lokal minimipunkt.

Svar: Origo är en lokal minimipunkt om $a \in (0, 4)$.

2) Sätt $F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z)) = (f(xy)+g(yz), g(xy)+f(yz))$. Derivering ger $\frac{\partial F_1}{\partial y} = xf'(xy)+zg'(yz)$, $\frac{\partial F_1}{\partial z} = yg'(yz)$, $\frac{\partial F_2}{\partial y} = xg'(xy)+zf'(yz)$, $\frac{\partial F_2}{\partial z} = yf'(yz)$. Det följer att

$$\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(y, z)}(1, 1, 1) = \begin{vmatrix} f'(1) + g'(1) & g'(1) \\ g'(1) + f'(1) & f'(1) \end{vmatrix} = f'(1)^2 - g'(1)^2.$$

Enligt implicita funktionssatsen kan vi lösa ut y och z som funktioner av x i ekvationen $F(x, y, z) = 0$ i en omgivning av $(1, 1, 1)$ om denna determinant är $\neq 0$. Ett tillräckligt villkor är därför att $f'(1) \neq \pm g'(1)$.

Svar: Ett tillräckligt villkor är att $f'(1) \neq \pm g'(1)$.

3) Upprepad integration ger att integralen kan skrivas

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_{x^2}^{1} \sqrt{y - x^2} dy \right) dx = \frac{2}{3} \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{3/2} dx.$$

Vi gör nu variabelbytet $x = \cos\theta$ vilket ger integralen

$$\frac{2}{3} \int_0^{\pi} \sin^4 \theta d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{i\theta} - e^{i\theta}}{2i} \right)^4 d\theta = \frac{1}{3} \frac{1}{2^4} \binom{4}{2} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{4}.$$

Svar: $\frac{\pi}{4}$.

4) Om vi kan visa att vektorfältet är konservativt i hela $\mathbb{R}^3$ följer att kurvintegralens värde är oberoende av valet av väg. Vi söker en potential ϕ till $\mathbf{F}$, $\mathbf{F} = \nabla\phi$. Ekvationen $\frac{\partial \phi}{\partial x} = y^2z + z^3/3$ ger $\phi = xy^2z + xz^3/3 + g(y, z)$. Deriverar vi detta med avseende på y får vi $2xyz + \frac{\partial g}{\partial y} = 2xyz + yz$, vilket ger $g(y, z) = y^2z/2 + h(z)$. Vi har alltså $\phi = xy^2z + xz^3/3 + y^2z/2 + h(z)$. Deriverar vi slutligen med avseende på z får vi

$xy^2 + xz^2 + y^2/2 + h'(z) = xy^2 + xz^2 + y^2/2$, det vill säga $h'(z) = 0$, vilket ger $h(z) = C$ för någon konstant C. Vi kan alltså välja $\phi(x, y, z) = xy^2z + xz^3/3 + y^2z/2$ som potential. Detta visar att vektorfältet $\mathbf{F}$ är konservativt i hela $\mathbb{R}^3$. Integralen ges nu av $\phi(1, 1, 1) - \phi(0, 0, 0) = 11/6$.

Svar: Integralen $= 11/6$.

5) Vi har $||\mathbf{r}'(t)|| = e^t\sqrt{(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2 + 1} = \sqrt{3}e^t$. Båglängden mellan punkterna $\mathbf{r}(t_0)$ och $\mathbf{r}(t_1)$, $t_0 < t_1$ ges av

$$L(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{3}e^t dt = \sqrt{3}(e^{t_1} - e^{t_0}).$$

Avståndet från $\mathbf{r}(t)$ till origo är $\sqrt{e^{2t}\cos^2 t + e^{2t}\sin^2 t + e^{2t}} = \sqrt{2}e^t$. Skillnaden i avstånd till origo mellan $\mathbf{r}(t_0)$ och $\mathbf{r}(t_1)$ är $f(t_0, t_1) = \sqrt{2}(e^{t_1} - e^{t_0})$. Vi ser att $L(t_0, t_1) = \sqrt{3/2}f(t_0, t_1)$.

Svar: Proportionalitetskonstanten är $\sqrt{3/2}$.

6) Vi har att $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = \nabla f \cdot \mathbf{n}$ och $\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} = \nabla g \cdot \mathbf{n}$. Högerledet i identiteten kan därför skrivas

$$\iint_{\partial\Omega} (f\nabla g - g\nabla f) \cdot \mathbf{n} dS.$$

Enligt Gauss' sats är detta lika med

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot (f\nabla g - g\nabla f) dV.$$

Nu är

$$\nabla \cdot (f\nabla g - g\nabla f) = \nabla f \cdot \nabla g + f\nabla \cdot (\nabla g) - \nabla g \cdot \nabla f + g\nabla \cdot (\nabla f) = f\Delta g - g\Delta f$$

eftersom $\nabla \cdot (\nabla f) = \Delta f$. Detta visar identiteten i uppgiften.

7) Vi parametriserar sfären med rymdpolära koordinater. Då är $dS = R^2 \sin\phi d\theta d\phi$ och vi får

$$\iint_{S_R} f(x^2 + y^2 + (z - c)^2) dS = R^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} f(R^2 - 2Rc\cos\phi + c^2) \sin\phi d\phi.$$

Låt F vara en primitiv funktion till f. Den sista integralen blir då

$$= 2\pi R^2 \left[\frac{1}{2cR} F(R^2 - 2Rc\cos\phi + c^2)\right]_0^{\pi} = \frac{\pi R}{c}(F((R + c)^2) - F((R - c)^2)).$$

Det sista uttrycket är precis

$$\frac{\pi R}{c} \int_{(R-c)^2}^{(R+c)^2} f(s) ds$$

och vi har visat den betraktade identiteten.

8) a) Kedjeregeln ger

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s} \quad ; \quad \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}.$$

Alltså är

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}\right) \times \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}\right) \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}.\end{aligned}$$

enligt räknereglerna för kryssprodukten.

b) Ytintegralen definieras genom

$$\iint_S f\,dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u,v)) \left\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right\| du dv.$$

c) Enligt definitionen, resultate i a) och formeln för variabelbyte i dubbelintegraler gäller

$$\begin{aligned}\iint_S f\,dS &= \iint_D f(\mathbf{r}(u,v)) \left\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right\| du dv \\ &= \iint_A f(\mathbf{r}(g(s,t)) \left\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right\| \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\right| ds dt \\ &= \iint_A f(\mathbf{R}(s,t)) \left\|\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t}\right\| ds dt.\end{aligned}$$

Båda parametriseringarna ger därför samma värde.