Lösningar till Tentamen i 5B1138 Reell analys II 2007-05-25

1) Beteckna kroppen med D_1. Dess volym kan då skrivas $\iiint_{D_1} dxdydz$. I denna integral gör vi variabelbytet $x = r^2$, $y = s^2$, $z = t^2$. Detta ger $dxdydz = 8rstdrdsdt$. Sätt $D_2 = \{(r,s,t)\,;\, r,s,t \geq 0\,,\, r+s+t \leq 1\}$. Volymen kan då skrivas

$$V = 8 \iiint_{D_2} rstdrdsdt = 8 \iint_{r+s\leq 1, r,s\geq 0} rs \left(\int_0^{1-r-s} tdt \right) drds$$
$$= 4 \iint_{r+s\leq 1, r,s\geq 0} rs(1-r-s)^2 drds = 4 \int_0^1 r \left(\int_0^{1-r} s(1-r-s)^2 ds \right) dr$$

Den inre integralen kan beräknas med partiell integration med resultatet $\frac{1}{12}(1-r)^4$. Återstår att beräkna $\frac{1}{3}\int_0^1 r(1-r)^4 dr$ vilket kan göras med partiell integration med resultatet $1/90$

Svar: $1/90$.

2) Vi ser att $\nabla \cdot \mathbf{F} = \cos y - \cos y + 0 = 0$, så vektorfältet är divergensfritt i hela $\mathbb{R}^3$. Då existerar en vektorpotential $\mathbf{A}$. Vi gör en ansats $\mathbf{A} = (A_1, A_2, 0)$. Vi får då

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(-\frac{\partial A_2}{\partial z}, \frac{\partial A_1}{\partial z}, \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right).$$

Detta ger $\frac{\partial A_2}{\partial z} = -x\cos y$ varur följer $A_2 = -xz\cos y + f(x,y)$. På samma sätt får vi $A_1 = -z\sin y + g(x,y)$. Tredje komponenten ge nu $\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = -\cos x$. Vi ser at vi kan välja $f(x,y) = -\cos x$ och $g = 0$.

Svar: En vektorpotential ges av $\mathbf{A} = (-z\sin y, -xz\cos y - \cos x, 0)$.

3) Sätt $f(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ och $g(x,y,z) = -(\alpha \ln x + \beta \ln y + \gamma \ln z)$. Vi söker då minimum av f i $x, y, z > 0$ under bivillkoret $g(x,y,z) = 0$. Lagrangemultiplikatormetoden ger att det finns λ så att

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} + \frac{\lambda\alpha}{x} = 0,$$

vilket ger $x = \frac{1}{\lambda\alpha}$. Motsvarande för y och z ger en kritisk punkt $(\frac{1}{\lambda\alpha}, \frac{1}{\lambda\beta}, \frac{1}{\lambda\gamma})$. Insatt i bivillkoret ger detta

$$\frac{1}{\lambda} = (\alpha^\alpha \beta^\beta \gamma^\gamma)^{1/(\alpha+\beta+\gamma)}.$$

Vi har att $\nabla g = -(\frac{\alpha}{x}, \frac{\beta}{y}, \frac{\gamma}{z})$ som är $\neq (0,0,0)$ så rangvillkoret är uppfyllt.

Då x, y eller $z \to \infty$ måste någon av x, y eller $z \to 0+$ om bivilloret skall kunna vara uppfyllt. Den funna kritiska punkten måste därför ge det globala minimivärdet.

Svar: Minimivärdet är
$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{(\alpha^\alpha\beta^\beta\gamma^\gamma)^{1/(\alpha+\beta+\gamma)}}.$$

4) a) Implicita funktionssatsen ger att detta är möjligt om $\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ och $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ i (x_0, y_0, z_0). Det följer också från implicita funktionssatsen att ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 är kontinuerligt deriverbara.

b) Det gäller att $F(\phi_1(y,z), y, z) = 0$, $F(x, \phi_2(x,z), z) = 0$ och $F(x, y, \phi_3(x,y)) = 0$ i em omgivning av (x_0, y_0, z_0). Derivering av dessa relationer med avseende på y, z respektive x ger

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \phi_2}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \phi_3}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

Detta ger
$$\frac{\partial \phi_1}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial x}, \frac{\partial \phi_2}{\partial z} = -\frac{\partial F/\partial z}{\partial F/\partial y}, \frac{\partial \phi_3}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}.$$
Multiplikation av dessa relationer ger den sökta identiteten.

5) a) Arean ges av
$$A = \iint_D \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| du dv.$$

b) En parametrisering av ytan ges av $\mathbf{r}(u,v) = (u\cos v, f(u), u \sin v)$ där $a \leq u \leq b$, $0 \leq v \leq 2\pi$. Detta ger $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = (\cos v, f'(u), \sin v)$ och $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (-u\sin v, 0, u\cos v)$. Alltså är
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (f'(u)u\cos v, -u, f'(u)u\sin v).$$
Trigonometriska ettan ger nu

$$\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| = |u|\sqrt{1+f'(u)^2}.$$

Insatt i areaformeln ger detta

$$A = \int_0^{2\pi}\left(\int_a^b |u|\sqrt{1+f'(u)^2}du\right)dv = 2\pi\int_a^b |u|\sqrt{1+f'(u)^2}du.$$

6) Stokes' sats ger

$$I = \frac{1}{2}\int_{\partial S} \mathbf{v}\times\mathbf{r}\cdot d\mathbf{s}\frac{1}{2}\iint_S \nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{r})\cdot\mathbf{n}dS.$$

Nu är $\mathbf{v}\times\mathbf{r} = (v_2z - v_3x, v_3x - v_1z, v_1y - v_2x)$, varför $\nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{r}) = (v_1 - (-v_1), v_2 - (-v_2), v_3 - (-v_3)) = 2\mathbf{v}$. Alltså är

$$I = \frac{1}{2}\iint_S 2\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dS = \iint_S \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dS.$$

7) a) Vi får att

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x)\frac{\partial r}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(r)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + f'(r)\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}.$$

Observera att $\frac{\partial r}{\partial x} = x/r$ och $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = 1/r - x^2/r^3$, varför

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(r)\frac{x^2}{r^2} + f'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^2}\right).$$

Vi får helt analoga yttryck för y- och z-derivatorna. Detta ger $\Delta u = f''(r) + \frac{2}{r}f'(r) = 0$.

Svar: $f''(r) + \frac{2}{r}f'(r) = 0$.

b) Eftersom $r \neq 0$ så följer från a) att vi söker lösningar till ekvationen $rf''(r) + 2f'(r) = 0$. Efter multiplikation med r ser vi att detta är ekvivalent med att $(r^2f'(r))' = 0$, varur $r^2f'(r) = -A$ för någon konstant A. Detta ger $f(r) = A/r + B$, där B också är en konstant.

Svar: $u(x,y,z) = A/\sqrt{x^2+y^2+z^2} + B$, där A, B är konstanter.

8) a) Vi får att $\nabla\times(\mathbf{F}-\mathbf{G}) = 0$ i B. Eftersom B är enkelt sammanhängande nedför detta att $\mathbf{F}-\mathbf{G}$ är konservativt, dvs. det finns en funktion $f: B\to\mathbb{R}$ så att $\mathbf{F}-\mathbf{G} = \nabla f$ i B.

b) Sätt $\mathbf{H} = \mathbf{F}-\mathbf{G}$. Enligt a) finns f så att $\mathbf{H} = \nabla f$ i B. Enligt antagande gäller också $\nabla\cdot\mathbf{H} = 0$, vilket ger $\nabla\cdot(\nabla f) = 0$ i B. Vidare gäller enligt antagande att $\mathbf{H}\cdot\mathbf{n} = 0$ på ∂B, dvs. $\nabla f\cdot\mathbf{n} = 0$ på ∂B. Det följer att $\nabla\cdot(f\nabla f) = \nabla f\cdot\nabla f + f\nabla\cdot(\nabla f) = ||\nabla f||^2$ i B. Gauss' sats ger

$$\int_B ||\nabla f||^2 dV = \int_B \nabla\cdot(f\nabla f)dV = \int_{\partial B} f\nabla f\cdot\mathbf{n}dS = 0.$$

Alltså är $\mathbf{H} = \nabla f = 0$ i B, ty ∇f är kontinuerlig och $||\nabla f||^2 \geq 0$ i B. Vi har visat att $\mathbf{F} = \mathbf{G}$ i B.