KUNGL. TEKNISKA HÖGSKOLAN
Matematiska Institutionen, **Höst 03.**

Lösning till Tentamensskrivning i Linjär algebra II 5B1139
9. januar 2004, 8.00-13.00

Lösning till Uppgift 1

(1) $(1,2,1)+s(3,0,0)$.
(2) Normalvektoren til planet er (A,B,C) och må ha samme retning som $PQ = (3,0,0)$. Derfor er $B=C=0$ videre må $3A=D$ for at planet skal gå gjennom det gitte punktet. Planet har derfor ligning $Ax=3A$, det vil si $x=3$.

Lösning till Uppgift 2

Vi har $PQ=(3,3,-1)$ och $PR=(4,3,-1)$. Arean blir derfor tall verdien av $PQ\times PR = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (0, 3-4, 3-12) = (0,-1,-3)$. Derfor er arean $\sqrt{0+1+9}=\sqrt{10}$. Vidare blir en enhetsvektor $\frac{1}{\sqrt{10}}(0,1,3)$.

Lösning till Uppgift 3

Inversen er

$$\begin{bmatrix} 200 & -53 & 10 \\ -41 & 11 & -2 \\ 19 & -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lösning till Uppgift 4

Matrisen $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -7+a & 7 \\ -2 & 1+a & -5+a \end{bmatrix}$ har determinanten a^2-3a så de er uavhengige når a er forskjellig fra 0 og 3.

Lösning till Uppgift 5

(1) Lineært uavhengige.
(2) Lineært avhengige.
(3) Vi velger $e_1' = u_1$ og setter $e_2' = s_1e_1' + u_2 = s_1(e_1+e_2)+e_1+e_2+e_3$. Vi får $(e_2'|e_1') = 2s_1+2$ så $s_1=-1$ og $e_2' = -(e_1+e_2)+e_1+e_2+e_3 = e_3$. Videre setter vi $e_3' = s_1e_1' + s_2e_2' + u_3 = s_1(e_1+e_2)+s_2e_2+e_1-e_2+e_3$. Vi må ha at $0=(e_3'|e_1') = s_12$ så $s_1=0$, og $0=(e_3'|e_2') = s_2+1$ så $s_2=-1$. Dette gir $e_3' = -e_3+e_1-e_2+e_3 = e_1-e_2$. Svaret er $\boxed{e_1'=e_1+e_2, e_2'=e_3, e_3'=e_1-e_2.}$
(4) Vi får $\boxed{e_1'=e_1+e_3, e_2'=e_2, e_3'=0.}$

Lösningarna fortsätter på sidan 2

Lösning till Uppgift 6

(1) Matrisen (1) har egenverdien $\lambda = 2$. Egenvektorene fåes av ligningen

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{eller} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

og blir $s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, som ikke er en basis for $\mathbf{R}^3$. Derfor kan matrisen ikke diagonaliseres.

(2) Matrisen (2) har egenverdiene $\lambda = 0, 2, 4$. Ettersom den har ulike egenverdier kan den diagonaliseres.

(3) Matrisen (3) er symmetrisk og kan derfor diagonaliseres.

Lösning till Uppgift 7

Kvadratkomplettering gir $3(x + \frac{1}{2}ay)^2 - \frac{3}{4}a^2y^2 + 3y^2 + 5az^2 = (3(x + \frac{1}{2}ay)^2 + \frac{3}{4}(4 - a^2)y^2 + 5az^2$. Derfor er indeks

$$\begin{array}{lll} (2,1) & \text{når} & a > 2 \\ (3,0) & \text{når} & 2 > a > 0 \\ (2,1) & \text{når} & 0 > a > -2 \\ (1,2) & \text{når} & -2 > a \\ (2,0) & \text{når} & a = 0, a = 2 \\ (1,1) & \text{når} & a = -2. \end{array}$$

Lösning till Uppgift 8

(1) $b(su + tv, w) = sb(u, w) + tb(v, w)$, og tilsvarende i andre koordinaten.

(2) $b(u, v) = b(v, u)$ for alle u, v.

(3) $q : V \to \mathbf{R}$ er kvadratisk form om det finnes bilineær form $b : V \times V \to \mathbf{R}$ slik att $q(u) = b(u, u)$ for alle u i V.

(4) Vi har, for alle u, v i V, at $b(u + v, u + v) = b(u, u) + 2b(u, v) + b(v, v)$. Derfor vil $b(u, v) = \frac{1}{2}(q(u + v) - q(u) - q(v))$.

Lösning till Uppgift 9

(1) $\dim(U + V) + \dim(U \cap V) = \dim(U) + \dim(V)$.

Lösning till Uppgift 9 fortsätter på sidan 3

(2) La $e_1, \ldots, e_m$ være en basis for $U \cap V$. Vi vet at denne kan utvides til en basis $e_1, \ldots, e_m, f_1, \ldots, f_p$ for U og til en basis $e_1, \ldots, e_m, g_1, \ldots, g_q$ for V. Vi påstår at $e_1, \ldots, e_m, f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q$ er en basis for $U + V$ og derfor at $\dim(U + V) = m+p+q = \dim(U)+q = \dim(U)+\dim(V)-m = \dim(U)+\dim(V)-\dim(U\cap V)$. For å vise påstanden viser vi først at elementene i den påståtte basen er lineært uavhengige. Anta at $a_1e_1+\cdots+a_me_m+b_1f_1+\cdots+b_pf_p+c_1g_1+\cdots+c_qg_q = 0$. Da vil begge sidene i likheten $a_1e_1+\cdots+a_me_m+b_1f_1+\cdots+b_pf_p = -c_1g_1-\cdots-c_qg_q$ være i $U\cap V$. Men ettersom $e_1, \ldots, e_m$ er basis for $U\cap V$ og $e_1, \ldots, e_m, g_1, \ldots, g_p$ er basis for V må $c_1 = \cdots = c_q = 0$. Da følger at $a_1 = \cdots = a_m = 0$ og $b_1 = \cdots = b_p = 0$. Vi har derfor vist lineær uavhengighet. Det gjenstår å vise at elementene genererer $U + V$. Men hver u i U kan skrives på formen $u = a_1e_1 + \cdots a_me_m + b_1f_1 + \cdots + b_pf_p$ og hvert elements v i V kan skrives på formen $v = a'_1e_1 + \cdots + a'_me_m + c_1g_1 + \cdots c_qg_q$. Derfor vil $u + v = (a_1 + a'_1)e_1 + \cdots + (a_m + a'_m)e_m + b_1f_1 + \cdots + b_pf_p + c_1g_1 + \cdots + c_qg_1$, som vi skulle vise.