KUNGL. TEKNISKA HÖGSKOLAN
Institutionen för Matematik, **Hösten 03.**

Tentamensskrivning i Linjär algebra II, 5B1139.
9. januar 2004, 8.00-13.00.

Hjälpmedel: Inga.
Anmärkning: Du får inga poäng för svar som inte har en noggrann förklaring.

Uppgift 1

Vi har två punkter $P = (1, 2, 1)$ och $Q = (4, 2, 1)$.

(1) Bestäm ekvationen på parameterform för linjen genom P och Q.
(2) Bestäm ekvationen på formen $Ax + By + Cz = D$ för planet som står normalt på linjen i del (1) och som går genom punkten $(3, -1, -1)$.

(3 poäng)

Uppgift 2

Vi har tre punkter $P = (1, -1, 2)$, $Q = (4, 2, 1)$ och $R = (5, 2, 1)$.

(1) Bestäm arean av parallellogrammet med sidor PQ och PR.
(2) Bestäm en enhetsvektor som er normal på det plan som innehåller parallellogrammet.

(3 poäng)

Uppgift 3

Bestäm inversen til matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 10 & -10 \\ -4 & -7 & 27 \end{bmatrix}$. (3 poäng)

Uppgift 4

För vilka värden på a är vektorerna $(1, -2, 3)$, $(2, -7 + a, 7)$ och $(-2, 1 + a, -5 + a)$ linjärt oberoende? (3 poäng)

Uppgift 5

Låt e_1, e_2, e_3 vara standard basen för det 3-dimensionala *reella* Euklidska rummet $\mathbf{R}^3$. Vilka av följande två familjer av 3 vektorer är lineärt oberoende?

(1) $u_1 = e_1 + e_2, u_2 = e_1 + e_2 + e_3, u_3 = e_1 - e_2 + e_3$.
(2) $u_1 = e_1 + e_3, u_2 = e_1 + e_2 + e_3, u_3 = e_1 - e_2 + e_3$.
(3) Vilka vektorer får du när du använder Gram-Schmidt's algoritm på vektorerna i (1)?
(4) Vilka vektorer får du när du använder Gram-Schmidt's algoritm på vektorerna i (2)?

Uppgift 5 fortsätter på sidan 2

(4 poäng)

Uppgift 6

Vilka av följande matriser är diagonaliserbara?

$$(1)\quad \begin{bmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2)\quad \begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3)\quad \begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 6 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(4 poäng)

Uppgift 7

Bestäm tröghetsindex för den kvadratiska formen

$$3x^2 + 3y^2 + 5az^2 + 3axy$$

för olika värden av a. (3 poäng)

Uppgift 8

Låt $b : V \times V \to \mathbf{R}$ vara en funktion.

(1) Vad betyder det att b är *bilineär*?
(2) Vad betyder det att b är *symmetrisk*?
(3) Vad är en *kvadratisk form*?
(4) Visa att om b är en symmetrisk bilineär form så är b bestämd av värdena $b(u, u)$ för alla u i V.

(4 poäng)

Uppgift 9

Låt W vara ett ändligt dimensionalt vektorrum, och låt U och V vara underrum av W. Vi betäcknar med $U \cap V$ underrummet av W som består av alla vektorer som tillhör både U och V. Vidare betäcknar vi med $U + V$ vektorrummet som består av alla vektorer på formen $u + v$ med u i U och v i V.

(1) Bestäm en ekvation som ger ett samband mellan talen $\dim(U), \dim(V), \dim(U \cap V)$ och $\dim(U + V)$.
(2) Bevisa ekvationen i del (1).

(6 poäng)