Institutionen för matematik
KTH

TENTAMEN 5B1139
LINJÄR ALGEBRA F1 (SPECIALKURS)
7 POÄNG
Måndagen den 6 december, 2004, kl. 14.00-19.00

Hjälpmedel: Inga.
Instruktioner: Tentamen består av 8 uppgifter, som ger totalt högst 24 poäng. För godkänt betyg (3) krävs 50% , medan för betyg 4 krävs 65%, och för betyg 5, 75%. (Inlämningsuppgifterna är värda 20%, och tentamen 80%.) Lösningarna skall motiveras väl.

Teoriuppgifter

1. Låt $F : V \to V$ vara en linjär avbildning. Visa att $\operatorname{Im}(F) \cong V/\operatorname{Ker}(F)$. (3p)
2. Låt $F : V \to V$ vara en symmetrisk linjär avbildning på ett ändligdimensionellt Euklidiskt rum. Visa att F har en bas av ortonormerade egenvektorer. (3p)

Problemuppgifter

3. Finn minstakvadratlösningen till

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(3p)

4. Låt $x(n) = A^n x(0)$ där $x(0) = (0, 3, 0)^t$ och

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 0 \\ 1/6 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Bestäm $\lim_{n\to\infty} x(n)$!

(3p)

V.G.V.

5. Betrakta den linjära operator L på $\mathbb{R}^3$ som defineras av

$$L((x_1, x_2, x_3)^T) = (2x_1 - x_2 + 3x_3, 2x_1 + 5x_2 + 2x_3, x_1 + x_2)^T$$

Bestäm matrisen för L i basen

$$(-1, 1, 0)^T, (-1, 0, 1)^T, (0, 1, 1)^T$$

(3p)

6. På det linjära rummet $\mathbb{R}_3[t]$ av alla reella tredjegradspolynom p betraktar man skalärprodukten

$$< p, q >= \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$$

Låt W vara underrummet av alla andragradspolynom. Bestäm den ortogonala projektionen av $p(t) = 2t^3 + 3t^2 + 5t + 7$ på W.

(3p)

Bevis

7. Låt A vara en reell symmetrisk $n \times n$ matris med positiva egenvärden. Visa att det finns en matris B så att $A = B^2$.

(3p)

8. Låt A vara en $n \times n$ matris med n distinkta reella egenvärden, och låt $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ vara det karakteristiska polynomet för A. Visa att $p_A(A) = 0$.

(3p)