Institutionen för matematik
KTH

TENTAMEN 5B1139
LINJÄR ALGEBRA F1 (SPECIALKURS)
7 POÄNG
Måndagen den 22 augusti, 2005, kl. 08.00-13.00

Hjälpmedel: Inga.
Instruktioner: Tentamen består av 8 uppgifter, som ger totalt högst 24 poäng. För godkänt betyg (3) krävs 50% , medan för betyg 4 krävs 65%, och för betyg 5, 75%. (Inlämningsuppgifterna är värda 20%, och tentamen 80%.) Lösningarna skall motiveras väl.

Teoriuppgifter

1. Låt $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vara egenvektorer som hör till olika egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ för en linjär avbildning F. Visa att $v_1, v_2, \ldots, v_n$ är linjärt obereoende. (3p)

2. Låt q vara en kvadratisk form på ett ändligtdimensionellt vektorrum V. Visa att det finns en ortonormerad bas $v_1, v_2, \ldots, v_n$ för V som diagonaliserar q, dvs
$$q\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i^2$$
för alla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

(3p)

Problemuppgifter

3. Låt
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$
Finn den vektor $w \in \text{Range}(A)$ som ligger närmast punkten $(1, 0, 0)^t$.

(3p)

4. Låt V vara underrummet av alla andragradspolynom, och låt $F : V \to \mathbb{R}$ vara en linjära avbildning definierad av
$$F(p(t)) = p(0) + p'(1).$$
Finn en bas för $\ker(F)$.

(3p)

V.G.V.

5. Låt V vara det euklidiska rummet $C[-1,1]$ med skalärprodukten

$$< f, g >= \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$

Låt W vara underrummet av alla andragradspolynom. Bestäm den ortogonala projektionen av $f(t) = |t|$ på W.

(3p)

6. Låt $x(n) = A^n x(0)$ där $x(0) = (1,1,1)^t$ och

$$A = \begin{pmatrix} 1/8 & 2/8 & 5/8 \\ 2/8 & 5/8 & 1/8 \\ 5/8 & 1/8 & 2/8 \end{pmatrix}$$

Bestäm $\lim_{n\to\infty} x(n)$!

(3p)

Bevis

7. Låt A och B vara två linjära avbildningar med egenskapen att

$$AB = \mu BA$$

för något $\mu \in \mathbb{R}$. Visa att om λ är ett egenvärde för A, så är även $\mu\lambda$ ett egenvärde för A.

(3p)

8. Låt A vara en linjär avbildning på ett ändligtdimensionellt vektorrum, och låt $p(t) \in \mathbb{R}[t]$ vara ett polynom av godtycklig grad med reella koefficienter. Visa att om μ är ett egenvärde för $B = p(A)$, så finns ett egenvärde λ för A så att $\mu = p(\lambda)$.

(3p)