3) Minsta kvadrat lösning ges av $A^tAx = A^tb$.

$$A^tA = \begin{pmatrix} 35 & 44 & 76 \\ 44 & 56 & 100 \\ 76 & 100 & 194 \end{pmatrix}; \quad A^tb = \begin{pmatrix} 24 \\ 34 \\ 77 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = \tfrac{1}{12}(-4, -11, 12) \quad \text{(t.ex.)}.$$

$\det(A) = 0 \Rightarrow$ lösning ej unik.

4) $x \in W^\perp \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} x = 0$

$$\Rightarrow x_1 = (-1, 0, 3, -2)^t, \; x_2 = (-2, 3, 0, -1)$$

Obs: $\langle x_1, x_2 \rangle \neq 0$.

Låt $x_2' = x_2 - \dfrac{\langle x_1, x_2 \rangle}{|x_1|^2} x_1 = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -12 \\ 21 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\therefore \; x_1 = (-1, 0, 3, -2)^t, \; x_2' = \frac{1}{7}(-12, 21, -6, -3)^t$

är en ortogonal bas för $W^\perp$.

5) $P_A(\lambda) = -(\lambda^3 - 17\lambda^2 + 31\lambda - 15)$

$P_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \; \lambda_2 = 1, \; \lambda_3 = 15$

$\Rightarrow v_1 = (-2 \; 1 \; 0)^t, \; v_2 = (-3 \; 0 \; 1)^t, \; v_3 = (1 \; 2 \; 3)^t$.

OBS: $\langle v_1, v_2 \rangle \neq 0$!

Låt $v_2' = v_2 - \langle v_2, v_1 \rangle / |v_1|^2 \cdot v_1 = \frac{1}{5}(-3 \; -6 \; 5)$

$\therefore \; \frac{1}{\sqrt{5}}(-2 \; 1 \; 0)^t, \; \frac{1}{\sqrt{70}}(-3 \; -6 \; 5)^t, \; \frac{1}{\sqrt{14}}(1 \; 2 \; 3)^t$

är en ON-bas av egenvektorer.

6. A sannolikhetsmatris $\Rightarrow$ $\lambda_1 = 1$ är ett egenvärde.

Låt $B = 10A$; då är $\mu_1 = 10$ ett egenvärde (till B.).

$\det(B) = 60$, $tr(B) = 16$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} 10\mu_2\mu_3 = 60 \\ 10 + \mu_2 + \mu_3 = 16 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\mu_2 = 3+\sqrt{3}$, $\mu_3 = 3-\sqrt{3}$

$\therefore$ $\lambda_2 = \mu_2/10$, $\lambda_3 = \mu_3/10$,

$|\lambda_2|, |\lambda_3| < 1$.

$\therefore$ $x(n) \to \alpha b_1$ då $Ab_1 = 1 \cdot b_1$.

$(A-I)b_1 = 0 \Rightarrow b_1 = (21 \quad 12 \quad 13)^t$.

A sannolikhetsmatris $\Rightarrow$

$x(n)$ & $x(0)$ har samma kolonnsumma

$\Rightarrow$ $\alpha(21+12+13) = 1+1+1 = 3$

$\Rightarrow$ $\alpha = 3/46$

$\therefore$ $x(n) \to \frac{3}{46} \cdot (21 \quad 12 \quad 13)$ då $n \to \infty$

$\frac{8}{6}$

6. A reguljär sannolikhetsmatris $\Rightarrow \lambda_1 = 1$ egenvärde ; övriga egenvärden har $|\lambda| < 1$.

$(A-I)b_1 = 0 \Rightarrow b_1 = (21 \quad 12 \quad 13)^t$

$\lim_{n\to\infty} x(n) = c \cdot b_1$ där

c bestäms av att $x(0)$ & cb_1 har samma kolonnsumma $\Rightarrow c = 3/46$.

$\therefore x(n) \longrightarrow \frac{3}{46}(21 \quad 12 \quad 13)$ då $n \to \infty$.

7. S symmetrisk $\Rightarrow$ $\exists$ ON-bas $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ så att $S b_i = \lambda_i b_i$, och $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Skriv $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

Då är $q(v) = \langle \sum_i \alpha_i b_i, S \sum_j \alpha_j b_j \rangle$

$$= \sum_{i,j} \langle b_i, \lambda_j b_j \rangle \alpha_i \alpha_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot \alpha_j^2$$

Men $|v|^2 = \langle \sum_i \alpha_i b_i, \sum_j \alpha_j b_j \rangle =$

$$= \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j \langle b_i, b_j \rangle = \sum_i \alpha_i^2$$

och vi ser att

$$q(v) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j^2 \leq \lambda_{max} \cdot \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2$$

$$= \lambda_{max} \cdot |v|^2.$$

8. Låt $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ vara bas för V.

Fixera i och betrakta $\{L^k b_i\}_{k=0}^{n}$.

$\dim(V) = n \implies$ kan hitta skalärer a_{ik} så att

$$\sum_{k=0}^{n} a_{ik} L^k b_i = 0.$$

$\therefore$ Om vi låter $p_i(t) = \sum_{k=0}^{n} a_{ik} t^k$

ser vi att $p_i(L) b_i = 0$.

$\therefore$ Om vi låter $p(t) = \prod_{i=1}^{n} p_i(t)$

ser vi att $p(L) b_j = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} p_i(L)\, p_j(L) b_j = 0 \quad \forall j$

(notera att $p_i(L)$ & $p_j(L)$ kommuterar!)

$\therefore \quad p(L) b_j = 0 \quad \forall j \implies$

$p(L) v = 0 \quad \forall v \in V$

(eftersom B är bas)

dvs $p(L)$ är nolloperatorn.