Institutionen för matematik
KTH

Tentamen 5B1139
Linjär algebra F1 (specialkurs)
7 poäng

Måndagen den 5 december, 2005, kl. 14.00-19.00

Hjälpmedel: Inga.
Instruktioner: Tentamen består av 8 uppgifter, som ger totalt högst 24 poäng. För godkänt betyg (3) krävs 50% , medan för betyg 4 krävs 65%, och för betyg 5, 75%. (Inlämningsuppgifterna är värda 20%, och tentamen 80%.) Lösningarna skall motiveras väl.

Teoriuppgifter

1. Låt W vara ett ändligtdimensionellt underrum till ett inre produktrum V. Visa att V är den interna direkta summan av W och $W^{\perp}$.

2. Låt V vara ett ändligtdimensionellt vektorrum. Antag att $A : V \to V$ och $B : V \to V$ är två kommuterande operatorer som var för sig är diagonaliserbara. Visa att A och B är *samtidigt diagonaliserbara.*

(3p)

Problemuppgifter

3. Låt $W \subset \mathbb{R}^4$ vara ett underrum definierat av $W = Span(\{(1,1,1,1)^t, (1,2,3,4)^t\}$. Finn en ortogonal bas för $W^{\perp}$.

(3p)

4. Låt
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 8 \\ 5 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$
och låt $b = (4,5,1)^t$. Finn en minsta kvadratlösning till $Ax = b$. Är lösningen unik?

(3p)

V.G.V.

5. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

Finn en ON-bas av egenvektorer för A.

(3p)

6. Låt $x(n) = A^n x(0)$ där $x(0) = (1, 1, 1)^t$ och

$$A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Bestäm $\lim_{n\to\infty} x(n)$!

(3p)

Bevis

7. Låt S vara en symmetrisk operator på ett ändligtdimensionellt reellt inre produktrum V, och definiera en funktion $q : V \to \mathbb{R}$ genom

$$q(v) = \langle v, Sv \rangle.$$

Låt λ_{max} vara det största egenvärdet till S (dvs, $\lambda \leq \lambda_{max}$ om λ är ett egenvärde.) Visa att

$$q(v) \leq \lambda_{max} \cdot |v|^2$$

gäller för alla $v \in V$.

(3p)

8. Låt L vara en linjär avbildning på ett ändligtdimensionellt reellt vektorrum V. Visa att det finns ett nollskilt polynom $p(t) \in \mathbb{R}[t]$ så att $p(L) = 0$. (Obs: om du använder dig av Cayley-Hamiltons sats måste du bevisa den. Ledtråd: problemet går att lösa utan att använda sig av Cayley-Hamiltons sats.)

(3p)