TENTAMEN 5B1142 20/12 2005

SVAR & LÖSNINGSFÖRSLAG

1. $f(x) = x^2 e^{-2x}$ är deriverbar överallt, och definierad på hela $\mathbb{R}$.

$\Longrightarrow$ lokala extremvärden endast i x s.a. $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 2x e^{-2x} - 2x^2 e^{-2x} = 2x(1-x)e^{-2x}$$

så $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ eller $x = 1$.

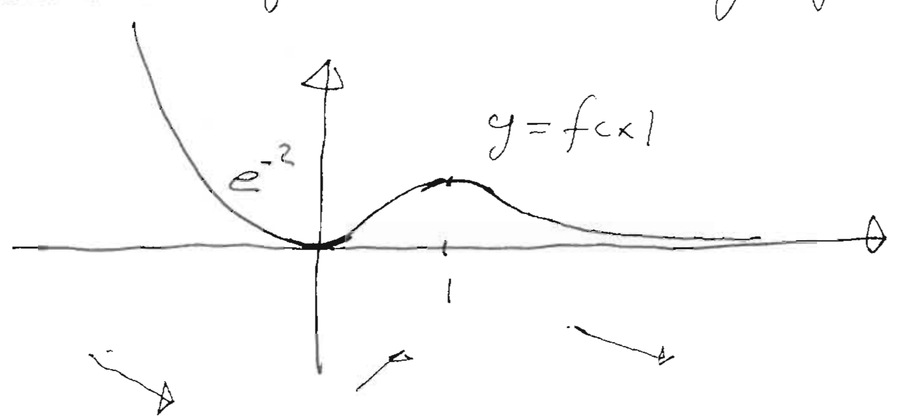
x		0		1	
$2x$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(1-x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
e^{-2x}	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$f(0)=0$	$\nearrow$	$f(1)=\frac{1}{e^2}$	$\searrow$

$\Longrightarrow$ $x = 0$ lokalt min med $f(0) = 0$

$x = 1$ lokalt max med $f(1) = e^{-2}$

Vi har
- $\lim_{x \to +\infty} x^2 e^{-2x} = \left\{ \begin{matrix} \text{std.} \\ \text{gr. vä} \end{matrix} \right\} = 0$
- $\lim_{x \to -\infty} x^2 e^{-2x} = \lim_{t \to +\infty} t^2 e^{2t} = +\infty$

Tillsammans ger detta en graf



så $f(0) = 0$ är minsta värde, största värde saknas

<u>SVAR</u>: $(0, 0)$ är lokalt min och $f(0) = 0$ minsta värde
$(1, e^{-2})$ är lokalt max. Största värde saknas

2) **Alt (I):**

Nämnaren $= x^2 + x - 2 \overset{\text{SÄTT}}{=} 0 \iff x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}}$

$= -2$ eller $+1$

Så $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$

Partialbråksuppdelning:

$$\frac{4x+2}{(x+2)(x-1)} \overset{\text{ANSATS}}{=} \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1) + B(x+2)}{(x+2)(x-1)}$$

$$= \frac{(A+B)x + (2B-A)}{(x+2)(x-1)}$$

Id. av koeff.:

$$\begin{matrix} (x) \\ (\text{konst.}) \end{matrix} \begin{cases} A + B = 4 \\ 2B - A = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 2 \\ B = 2. \end{cases}$$

$$\int_2^3 \frac{4x+2}{x^2+x-2}\,dx = \int_2^3 \left(\frac{2}{x+2} + \frac{2}{x-1}\right) dx = \Big[2\ln|x+2| + 2\ln|x-1|\Big]_2^3$$

$$= 2\Big[\ln|x^2+x-2|\Big]_2^3 = 2\Big[\ln 10 - \ln 4\Big]$$

$$= 2\ln\frac{10}{4} = 2\ln\frac{5}{2}$$

Alt II: Vi observerar att $\frac{d}{dx}(x^2+x-2) =$

$$= 2x + 1 = \frac{1}{2}(4x+2).$$

$$\int_2^3 \frac{4x+2}{x^2+x-2}\,dx = \left\{\begin{matrix} u = x^2 + x - 2 \\ du = (2x+1)\,dx \\ u(3) = 10 \quad u(2) = 4 \end{matrix}\right\} = 2\int_4^{10} \frac{du}{u}$$

$$= 2\Big[\ln|u|\Big]_4^{10} = 2\ln\frac{5}{2}$$

$$\boxed{\text{SVAR: } 2\ln\frac{5}{2}}$$

③ Vi har följande Maclaurin utv.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + B_1(x)\,x^3$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + B_2(x)\,x^4$$

B_1 och B_2 begränsade när $x \to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(x - \frac{x^2}{2} + B_1(x)\,x^3\right)}{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + B_2(x)\,x^4\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + B_3(x)\,x^3}{\frac{x^2}{2} + B_4(x)\,x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + B_3(x)\,x}{1/2 + B_4(x)\,x^2} = \underline{\underline{2}}$$

Alternativ Lösning:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x} = \left\{\text{typ } \text{"}\tfrac{0}{0}\text{"}, \text{ l'Hospitals regel}\right\}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}}{\sin x} = \left\{\text{typ } \text{"}\tfrac{0}{0}\text{"}, \text{ l'Hospital igen}\right\}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x} + \frac{1\cdot(1+x) - x}{(1+x)^2}}{\cos x} = \frac{1+1}{1} = \underline{\underline{2}}$$

$$\boxed{\underline{\text{SVAR:}}\quad 2}$$

(4) Planens skärning ges av lösningarna till

$$\begin{cases} ax - 3y + z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 6x - y + 3z = b \end{cases}$$

Skärningen en linje $\Longleftrightarrow$ lösning med <u>1</u> parameter.

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} a+6 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 8 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

utv. längs kolonn 2

$$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} a+6 & 4 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow 4(a+6) = 4 \cdot 8 \Longleftrightarrow a = 2$$

Så ~~det~~ för $a=2$ har systemet antingen ∞ många lösningar eller inga lösningar alls.

Gauss eleminationen ger (med $a=2$)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 3 & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 4 & b \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right) \qquad b \neq 0 \Rightarrow \text{saknar lösningar}$$

$$b = 0 \quad \sim \begin{cases} 2x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -2t \end{cases}$$

ekv. för linje

$$\boxed{\underline{\text{SVAR:}} \quad a = 2 \text{ och } b = 0}$$

5 $v(t) = \dfrac{20e^{0.1t} - 20}{4e^{0.1t} + 25}$

a) $v'(t) = \dfrac{20 \cdot 0.1 \cdot e^{0.1t}(4e^{0.1t} + 25) - 4 \cdot 0.1 e^{0.1t}(20e^{0.1t} - 20)}{(4e^{0.1t} + 25)^2}$

$= \dfrac{e^{0.1t}}{(4e^{0.1t}+25)^2}\left(\cancel{8e^{0.1t}} + 50 - \cancel{8e^{0.1t}} + 8\right) > 0$

alla t $\Rightarrow$ $v(t)$ strikt växande

b) $\lim_{t \to +\infty} v(t) = \lim_{t \to +\infty} \dfrac{\cancel{e^{0.1t}}(20 - 20\underbrace{e^{-0.1t}}_{\to 0})}{\cancel{e^{0.1t}}(4 + 25\underbrace{e^{-0.1t}}_{\to 0})}$

$= \dfrac{20}{4} = 5.$

Så hastigheten växer monotont från $v(0) = 0$ mot gränsvärdet $\lim_{t \to +\infty} v(t) = 5$

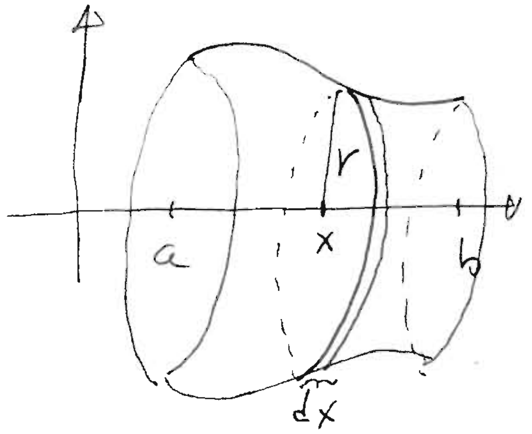
$\Rightarrow$ $v(t) \leq 5$ [m/s] alla t

(men även för relativt små t, säg $t = 100$ s, är $v(t)$ "nära" 5, $v(100) = \dfrac{20 \cdot e^{10} - 20}{4 \cdot e^{10} + 25} \approx 5$)

SVAR: De måste tåla en nedslagshastighet om minst 5 m/s

6

a)



Tvärsnitt vid x = cirkelskiva med $r = f(x)$ med area $A(x) = \pi r^2 = \pi [f(x)]^2$

En tunn skiva med tjocklek dx vid x har då volym $dV = A(x)\,dx = \pi [f(x)]^2 dx$

$$\Rightarrow V = \int_a^b dV = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \qquad \text{V.S.B.}$$

b)

$$V = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{\frac{1-x}{x^2+1}}\right)^2 dx = \pi \int_0^1 \frac{1-x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \pi \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx - \pi \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \pi \left[\arctan x\right]_0^1 - \pi \left[\frac{1}{2} \ln(x^2+1)\right]_0^1$$

$$= \pi(\arctan 1 - \arctan 0) - \frac{\pi}{2}(\ln(2) - \ln 1)$$

$$= \pi \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \ln 2 = \frac{\pi^2 - 2\pi \ln 2}{4}$$

7

$f(x) = (x+1)e^{-2x} \geq 0$ för $x \geq 1$

och $f'(x) = e^{-2x} - 2(x+1)e^{-2x} = e^{-2x}(1-2x-2) < 0$

för $x \geq 1$ så f är <u>avtagande</u> och <u>positiv</u>.

Alltså $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)e^{-2n}$ konv. $\overset{\text{Cauchys}}{\underset{\text{Integral kriterium.}}{\Longleftrightarrow}}$ $\int_1^{\infty}(x+1)e^{-2x}\,dx$ konv.

$$\int_1^{\infty}(x+1)e^{-2x}\,dx = \begin{bmatrix} g(x) = x+1 & F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} \\ g'(x) = 1 & f(x) = e^{-2x} \end{bmatrix}$$

$$= \left[-\frac{1}{2}(x+1)e^{-2x}\right]_1^{\infty} + \frac{1}{2}\int_1^{\infty} e^{-2x}\,dx =$$

$$= \lim_{A\to\infty}\left(e^{-2} - \underbrace{\frac{1}{2}(A+1)e^{-2A}}_{\to 0}\right) + \lim_{A\to\infty}\left[\frac{e^{-2}}{4} - \underbrace{\frac{e^{-2A}}{4}}_{\to 0}\right]$$

$$= \frac{5e^{-2}}{4}.$$

Alltså $\int_1^{\infty}(x+1)e^{-2x}\,dx$ konvergent $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)e^{-2n}$ konvergent.

(<u>Alternativt</u> kan man visa att

$(n+1)e^{-2n} \leq e^{-n}$ för $n \geq 1$

och $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$ är konvergent geometrisk serie

$\Rightarrow \sum_{1}^{\infty}(n+1)e^{-2n}$ konvergent)

<u>SVAR:</u> Serien är <u>Konvergent</u>

8.

- Vi löser först den homogena ekvationen $y'' - 4y' + 13y = 0$

<u>KAR. EKV:</u> $r^2 - 4r + 13 = 0 \Leftrightarrow r = 2 \pm 3i$

$$\Rightarrow y_h(x) = e^{2x}(a\cos 3x + b\sin 3x)$$

- Vi bestämmer en partikulär lösning genom ansatsen

$$y_p(x) = Ax + B, \Rightarrow y_p' = A, \quad y_p'' = 0$$

som insatt i given ekvation ger

$$0 - 4A + 13(Ax + B) = 13x + 9$$

$$\Leftrightarrow 13Ax + (13B - 4A) = 13x + 9$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 13A = 1 \\ 13B - 4A = 9 \end{cases} \Rightarrow A = 1 \quad \Rightarrow B = 1$$

så $y_p(x) = x + 1$

Allmän lösning $y_g(x) = y_h(x) + y_p(x) =$

$$= e^{2x}(a\cos 3x + b\sin 3x) + x + 1$$

$y(0) = 0 \Leftrightarrow a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -1$

så $y(x) = e^{2x}(-\cos 3x + b\sin 3x) + x + 1$

$\Rightarrow y'(x) = 2e^{2x}(-\cos 3x + b\sin 3x) + 3e^{2x}(\sin 3x + b\cos 3x) + 1$

$y'(0) = 1$ ger då $2(-1 + b\cdot 0) + 3(0 + b) + 1 = 1$

$\Leftrightarrow -2 + 3b = 0 \Leftrightarrow b = 2/3$

<u>SVAR:</u> $y(x) = e^{2x}\left(\frac{2}{3}\sin 3x - \cos 3x\right) + x + 1$

(9) Volymen ges av

$$V = V(t) = \left| \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sin t & 0 & \cos t \\ \cos t & \sin t & 0 \end{vmatrix} \right| = \left| \begin{vmatrix} 0 & \cos t \\ \sin t & 0 \end{vmatrix} \right| =$$

$$= \left| -\sin t \cos t \right| = \left| \frac{\sin 2t}{2} \right|$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \sin 2t \geq 0 \\ \text{om } 0 \leq t \leq \pi/2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \sin 2t. \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Största värde antas i kritiska punkter ($V' = 0$) eller i def.-intervallets ändpunkter.

$$V'(t) = \cos 2t, \quad V' = 0 \Leftrightarrow \cos 2t = 0$$

$$\Leftrightarrow 2t = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}$$

Endast $t = \frac{\pi}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$V\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \sin 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$$

$$V(0) = \frac{1}{2} \sin 0 = 0$$

$$V\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \sin \frac{2 \cdot \pi}{2} = \frac{1}{2} \sin \pi = 0$$

~~Ad:~~

$\boxed{\text{SVAR: } t = \frac{\pi}{4} \text{ ger maximal volym och } V_{max} = V\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \text{ v.e.}}$