KTH Matematik
Hans Thunberg

Tentamen 5B1142 Envariabelanalys och Linjär Algebra
20/12 2005 kl 8-13

Tentamen består av två delar.

Den första delen utgörs av fyra uppgifter som svarar mot kursens fyra moduler. Du ska bara räkna de uppgifter som motsvarar de moduler som du inte har klarat under kursens gång. Varje uppgift ger maximalt fyra poäng, och för att bli godkänd på en modul krävs minst tre poäng på motsvarande uppgift.

Den andra delen består av fem uppgifter som ger vardera ger maximalt 4 poäng.

För full poäng på en uppgift krävs en fullständig och väl strukturerad och motiverad lösning.

Följande betygsgränser är preliminära och kan komma att justeras något.

- För betyg E och 3: Godkänt på modul 1-4 samt minst 5 poäng på del 2
- För betyg D och 3: Godkänt på modul 1-4 samt minst 7 poäng på del 2
- För betyg C och 4: Godkänt på modul 1-4 samt minst 10 poäng på del 2
- För betyg B och 4: Godkänt på modul 1-4 samt minst 12 poäng på del 2
- För betyg A och 5: Godkänt på modul 1-4 samt minst 15 poäng på del 2

Lycka till!

Del 1

(1) Bestäm alla lokala maxima och minima till funktionen $f(x) = x^2e^{-2x}$, och ange också i förekommande fall funktionens största och minsta värden.

(2) Beräkna
$$\int_2^3 \frac{4x+2}{x^2+x-2}\,dx.$$

(3) Beräkna gränsvärdet
$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}.$$

(4) Bestäm konstanterna a och b så att de tre planen $ax-3y+z=0$, $2x+y+z=0$ och $6x-y+3z=b$ skär varandra längs en gemensam linje.

Del 2

(5) Behållare med varor skall släppas ner med fallskärm från ett flygplan. Man vet att fallskärmen med sin last har den vertikla fallhastigheten

$$v(t) = \frac{20e^{0.1t} - 20}{4e^{0.1t} + 25} \quad \text{[m/s]},$$

där t är tiden mätt i sekunder efter det att lasten har släppts från flyplanet.
a) Visa att $v(t)$ är en strikt växande funktion. (2p)
b) Vilken nedslagshastighet måste behållarna tåla om man skall vara säker på att de ej går sönder vid nedslaget? (2p)

(6) a) Om området $0 \leq y \leq f(x)$, $a \leq x \leq b$, roterar kring x-axeln sveper det ut en kropp med volymen $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$.
Härled denna volymsformel. (2p)

b) Beräkna volymen av den kropp som uppkommer när området

$$0 \leq y \leq \sqrt{\frac{1-x}{x^2+1}}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

får rotera runt x-axeln. (2p)

(7) Avgör om serien $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)e^{-2n}$ är konvergent eller divergent.

(8) Bestäm den funktion $y = y(x)$ som uppfyller

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 13y = 13x + 9 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

(9) En parallellepiped spänns upp av vektorerna $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v} = (\sin t, 0, \cos t)$ och $\mathbf{w} = (\cos t, \sin t, 0)$ där t är ett tal mellan 0 och $\pi/2$. Hur skall t väljas för att parallellepipedens volym ska bli så stor som möjligt? Beräkna också den maximala volymen.