SVAR & LÖSNINGSFÖRSLAG
5B1142 2/6 2006

(1.) SKISSERA GRAFEN TILL $y = \frac{e^x}{1+x^2}$, $-\infty < x < \infty$,

OCH ANGE SAMTLIGA KRITISKA PUNKTER OCH ASYMPTOTER, SAMT VAR FUNKTIONEN ÄR VÄXANDE RESP. AVTAGANDE.

Vi konstaterar först att

- $y(x) > 0 \quad \forall x$
- $y(x) \to +\infty, \quad x \to +\infty$

$\left(\text{ty } \lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} e^x/(1+x^2) > \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty\right)$

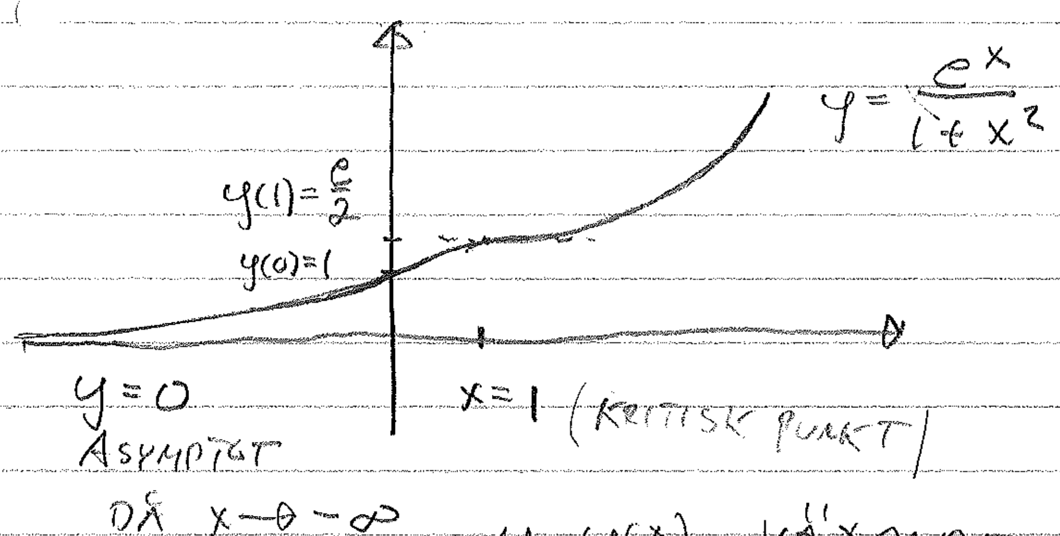
- $y(x) \to 0, \quad x \to -\infty$

Derivatan ges av

$$y' = \frac{e^x(1+x^2) - 2xe^x}{(1+x^2)^2} = \frac{e^x}{(1+x^2)^2}\left(1+x^2-2x\right) = \frac{e^x}{1+x^2}(1-x)^2$$

Det följer att

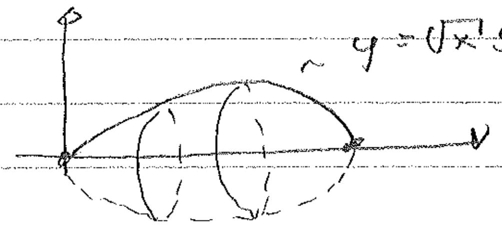
$$\left.\begin{array}{ll} \cdot\ y' = 0 & \text{omm } x = 1 \\ \cdot\ y' > 0 & x \neq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \cdot\ x = 1 \text{ enda krit. pkt} \\ \cdot\ y(x) \text{ strikt växande alla } x. \end{array}$$



$y = y(x)$ VÄXANDE ALLA $x \in \mathbb{R}$.

(2) BESTÄM VOLYMEN AV DEN KROPP SOM BILDAS NÄR OMRÅDET $0 \le y \le \sqrt{x}\sin x$, $0 \le x \le \pi$, FÅR ROTERA ETT VARV KRING X-AXELN.

$\sin x > 0$ för $0 < x < \pi$ och $\sin 0 = \sin \pi = 0$.



$$V = \pi \int_0^{\pi} \left(\sqrt{x}\sin x\right)^2 dx = \pi \int_0^{\pi} x \sin^2 x \, dx$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \\ \Rightarrow \sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\underbrace{\int_0^{\pi} x \, dx}_{I_1} - \underbrace{\int_0^{\pi} x \cos 2x \, dx}_{I_2} \right)$$

$$I_1 = \left[x^2/2 \right]_0^{\pi} = \pi^2/2$$

$$I_2 = \left\{ \begin{array}{ll} U = x & V = \frac{1}{2}\sin 2x \\ dU = dx & dV = \cos 2x \, dx \end{array} \right\} = \left[\frac{1}{2} x \sin 2x \right]_0^{\pi}$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin 2x \, dx = \frac{1}{4}\left[\cos 2x \right]_0^{\pi} = 0$$

Alltså är $V = \frac{\pi}{2}\left(I_1 - I_2 \right) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^3}{4}$

$\boxed{\text{Svar: } \pi^3/4 \text{ v.e.}}$

3.

Se Läroboken Persson & Böiers

Kapitel 7.9

(4.) BESTÄM EKVATIONEN FÖR DET PLAN SOM GÅR IGENOM PUNKTEN $P(1,1,0)$, OCH SOM ÄR ORTOGONALT MOT LINJEN GENOM $Q(3,4,0)$ OCH $R(0,3,-2)$

Linjen genom Q och R har riktningsvektor

$$\bar{v} = \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OQ} = (0,3,-2) - (3,4,0) =$$
$$= (-3,-1,-2)$$

Planet $\perp$ Linjen $\Rightarrow$ $-\bar{v} = \bar{n}$ = normal till planet

$$\bar{n} = (3,1,2)$$

Enpunktsformeln ger planets ekvation

$$3(x-1) + (y-1) + 2z = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x + y + 2z = 4$$

SVAR: $3x + y + 2z = 4$

(5) $f(x) = x + \ln(3 - x^2)$

a) $D_f = \{x : 3 - x^2 > 0\} = \{x : -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}\}$

(eftersom $\ln t$ def. omm $t > 0$)

b) $f'(x) = 1 + \frac{(-2x)}{3 - x^2} = (3 - x^2 - 2x)/3 - x^2$

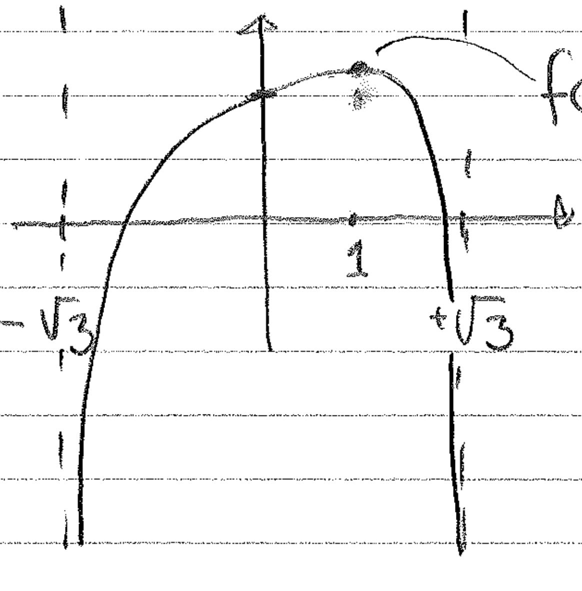
$= -(x^2 + 2x - 3)/(3 - x^2)$

$= -(x+3)(x-1)/(3 - x^2)$

$\Rightarrow$
- $x = 1$ är enda krit pkt i $D_f = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$
- $f' > 0$, dvs f växande om $x \in (-\sqrt{3}, 1)$
- $f' < 0$, dvs f avtagande om $x \in (1, \sqrt{3})$

Dessutom gäller $\lim_{x \to +\sqrt{3}^-} f(x) = \lim_{x \to -\sqrt{3}^+} f(x) =$

$= -\sqrt{3} + \lim_{x \to -\sqrt{3}^+} \ln(3 - x^2) = -\sqrt{3} + \lim_{t \to 0^+} \ln t = -\infty$



$f(1) = 1 + \ln 2$

- $D_f = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

SVAR: $f(1) = 1 + \ln 2$ = största värde

- minsta värde saknas

6.

BESTÄM ETT APPROXIMATIVT VÄRDE TILL $(1.1)^{3/2}$ MED HJÄLP AV 2:A ORDNINGENS MACLAURIN-UTVECKLING AV $f(x) = (1+x)^{3/2}$

$f(x) = (1+x)^{3/2}$ $\quad$ $f(0) = 1$

$f'(x) = \frac{3}{2}(1+x)^{1/2}$ $\quad$ $f'(0) = \frac{3}{2}$

$f''(x) = \frac{3}{4}((1+x)^{-1/2}$ $\quad$ $f''(0) = \frac{3}{4}$

$f(h) \approx f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2}h^2$ för $h \approx 0$

$= 1 + \frac{3}{2}h + \frac{3}{8}h^2$

$(1.1)^{3/2} = (1+0.1)^{3/2} = f(0.1) \approx 1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{10} + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{100}$

$= 1 + 0.15 + 0.375/100 = 1 + 0.15 + 0.00375$

≈ 1.154

<u>SVAR:</u> $(1.1)^{3/2} \approx 1.154$

7. $I = \int_1^\infty \frac{x+1}{x^2+5x+6}\,dx$

$x^2+5x+6 = (x+2)(x+3)$ så

$$\frac{x+1}{(x+2)(x+3)} \overset{\text{ANSATS}}{=} \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x+2)}{(x+2)(x+3)}$$

$$= \frac{(A+B)x+(3A+2B)}{(x+2)(x+3)}$$

Id. koeff. $\begin{cases} A+B=1 \\ 3A+2B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=1-A \\ 3A+2-2A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{x^2+5x+6} = \frac{2}{(x+3)} - \frac{1}{(x+2)}$$

$$\Rightarrow I = \int_1^\infty \left(\frac{2}{x+3} - \frac{1}{x+2}\right)dx = \lim_{X\to\infty}\Big[2\ln(x+3) - \ln(x+2)\Big]_1^X$$

$$= \lim_{X\to\infty}\left[\ln\frac{(x+3)^2}{(x+2)}\right]_1^X = \lim_{X\to\infty}\left[\ln\frac{X^2+6X+9}{X+2}\right]$$

$$-\ln\frac{16}{3} = \lim_{X\to\infty} \underbrace{\frac{X+6+9/X}{1+2/X}}_{\to\infty} - \ln\frac{16}{3}$$

$= +\infty$

SVAR: DIVERGENT (MOT $+\infty$)

8. BESTÄM FUNKTIONEN $y(x)$ SÅ ATT

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 1+4y^2 \\ y(\pi) = 1/2 \end{cases}$$

Ekvationen $\frac{dy}{dx} = 1+4y^2$ är separabel.

$$\int \frac{dy}{1+4y^2} = \int dx \Rightarrow \frac{1}{2}\arctan 2y = x + C_1$$

Villkoret $y(\pi) = 1/2$ ger

$$\frac{1}{2}\arctan 1 = \pi + C_1$$

$$\frac{1}{2}\frac{\pi}{4} = \pi + C_1 \Rightarrow C_1 = -\frac{7\pi}{8}$$

Alltså

$$\frac{1}{2}\arctan 2y = x - \frac{7\pi}{8} \Rightarrow \arctan 2y = 2x - \frac{7\pi}{4}$$

$$\Rightarrow 2y = \tan\left(2x - \frac{7\pi}{4}\right) \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}\tan\left(2x - \frac{7\pi}{4}\right)}$$

Kontroll: $\frac{d}{dt}\tan t = \frac{d}{dt}\frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\left(2x - \frac{7\pi}{4}\right)} \cdot 2 = \frac{1}{\cos^2\left(2x - \frac{7\pi}{4}\right)}$$

$$1+4y^2 = 1 + \tan^2\left(2x - \frac{7\pi}{4}\right) = \frac{1}{\cos^2\left(2x - \frac{7\pi}{4}\right)}$$

$y(\pi) = \frac{1}{2}\tan\left(2\pi - \frac{7\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\tan(\pi/4) = 1/2$

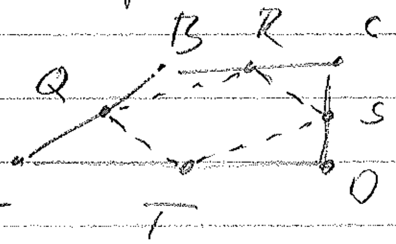
9.

AVGÖR OM FÖLJANDE PÅSTÅENDE ÄR SANT ELLER FALSKT;

"Utgå ifrån en godtycklig fyrhörning K. Bilda en ny fyrhörning L genom att sammanbinda mittpunkterna på K:s sidor. L blir då alltid en parallellogram"

(ETT BEVIS FÖR DIN SLUTSATS KRÄVS NATURLIGTVIS)

Låt hörnen betecknas A, B, C, D, och mittpunkterna på sidorna Q, R, S, T enligt figur



Låt dessa punkter ha ortvektorer $\bar{a} = \overrightarrow{OA}$, $\bar{q} = \overrightarrow{OQ}$ osv.

Då är $\bar{q} = \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\bar{b} + \bar{a})$, $\bar{r} = \frac{1}{2}(\bar{c} + \bar{b})$, $\bar{s} = \frac{1}{2}(\bar{d} + \bar{c})$ och $\bar{t} = \frac{1}{2}(\bar{a} + \bar{d})$.

Vi skall nu visa att $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{QT}$ och $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{TS}$

$\cdot\ \overrightarrow{RS} = \bar{s} - \bar{r} = \frac{1}{2}(\bar{d} + \bar{c}) - \frac{1}{2}(\bar{c} + \bar{b}) = \frac{1}{2}(\bar{d} - \bar{b})$

$\overrightarrow{QT} = \bar{t} - \bar{q} = \frac{1}{2}(\bar{a} + \bar{d}) - \frac{1}{2}(\bar{b} + \bar{a}) = \frac{1}{2}(\bar{d} - \bar{b}) = \overrightarrow{RS}$

$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{TS}$ följer motsv. sätt.