LÖSNINGSFÖRSLAG TILL TENTAMEN 5B1142 20/12 2006

(1.) • Teckentabell för f:

		$x=-2$		$x=5/2$		$\rightarrow x$
$2x-5$	$- \; -$	$-$	$- \; -$	0	$+ + +$	
$x+2$	$- \; -$	0	$+ + +$	$+$	$+ + + +$	
f	$+ \; +$	odef	$- \; -$	0	$+ \; +$	

$f(x) > 0$ omm $x \in (-\infty, -2) \cup (5/2, \infty)$

$f(x) < 0$ omm $x \in (-2, 5/2)$.

• $$f'(x) = \frac{2\cdot(x+2) - (2x-5)}{(x+2)^2} = \frac{9}{(x+2)^2} > 0 \quad \text{alla } x \neq -2$$

dvs f är växande på hela sitt naturliga definitionsområde $D_f = \{x : x \neq -2\}$

• Vågräta asymptoter:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-5}{x+2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x}\,(2 - \overbrace{5/x}^{\to 0})}{\cancel{x}\,(1 + \underbrace{2/x}_{\to 0})} = \frac{2}{1} = 2$$

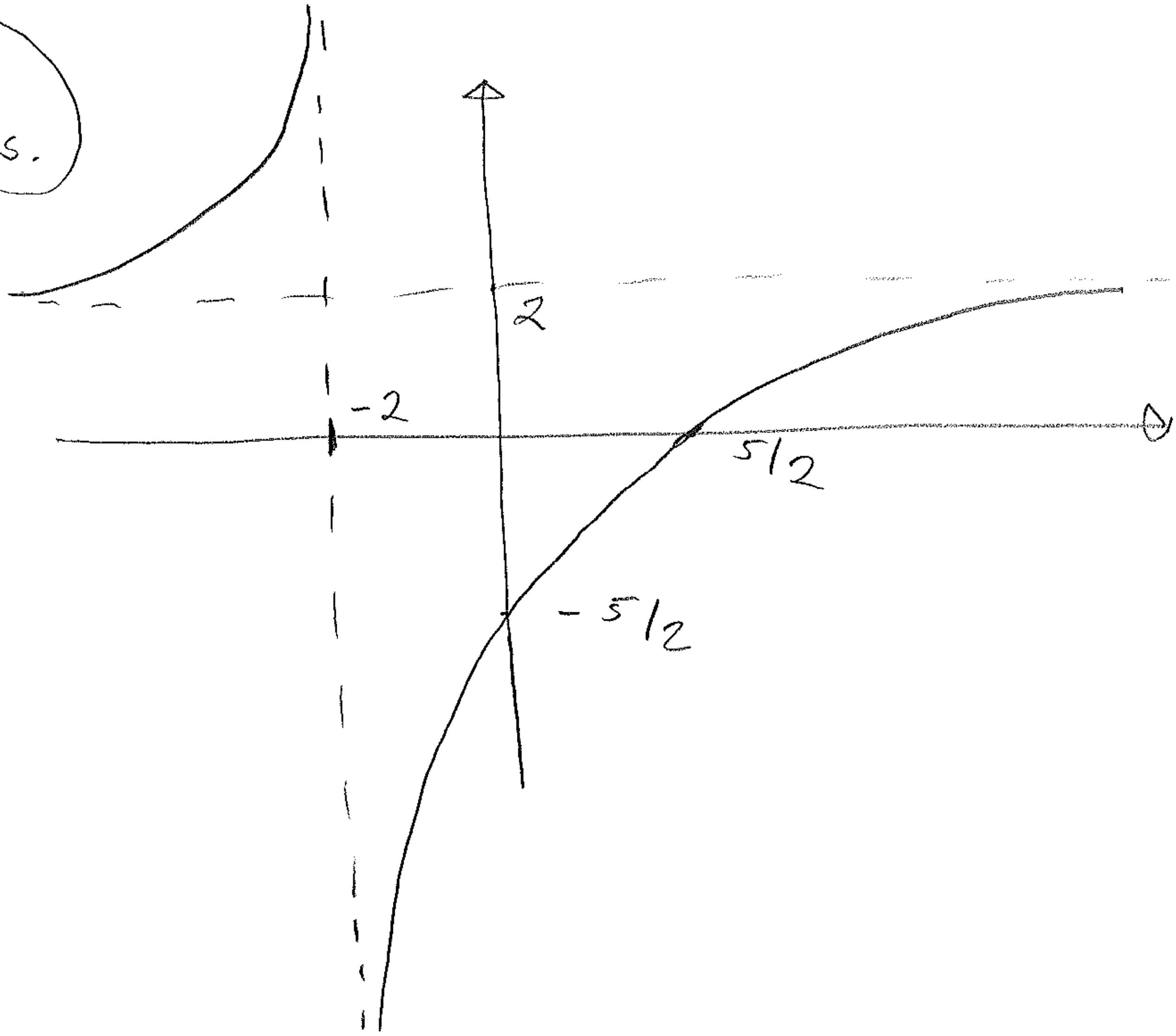
dvs $y=2$ är vågrät asymptot då $x \to \pm\infty$

• Lodrätt asymptot: $f(x)$ är kontinuerlig för alla $x \neq -2$

$$\lim_{x\to -2+} f(x) = \lim_{x\to -2+} \frac{2x-5}{x+2} = \left\{ \begin{matrix} 2x-5 \to -9 < 0 \\ x+2 \to 0+ \end{matrix} \right\} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -2-} f(x) = \left\{ \begin{matrix} 2x-5 \to -9 < 0 \\ x+2 \to 0- \end{matrix} \right\} = +\infty$$

1. forts.



2

a) $$\int_0^1 x e^x \, dx = \left\{ \begin{array}{ll} \text{Partiell Integration} & \\ U = x & V = e^x \\ U' = 1 & V' = e^x \end{array} \right\}$$

$$= \left[x e^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx = \left[x e^x \right]_0^1 - \left[e^x \right]_0^1 =$$

$$= e - (e-1) = \underline{1}$$

b) $$\int_0^1 x e^{x^2} dx = \left\{ \begin{array}{ll} \text{Substitution} & \\ t = x^2 & t(0) = 0, \; t(1) = 1 \\ \frac{1}{2} dt = 2x \, dx & \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 e^t \, dt = \frac{1}{2} \left[e^t \right]_0^1 = \frac{e-1}{2}$$

<u>Svar:</u> a) 1

b) $\dfrac{e-1}{2}$

(3)

$f(x) = \sqrt{x}$ $\qquad$ $f(9) = \sqrt{9} = 3$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\qquad$ $f'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$

$f''(x) = -\frac{1}{4x^{3/2}}$ $\qquad$ $f''(9) = -\frac{1}{4\cdot 9^{3/2}} = -\frac{1}{4\cdot 27} = -\frac{1}{108}$

Taylors formel ger

$$P_2(x) = f(9) + f'(9)(x-9) + \frac{f''(9)}{2}(x-9)^2 =$$
$$= 3 + 1/6\,(x-9) - \frac{1}{216}(x-9)^2$$

$$\sqrt{8.9} = f(8.9) \approx P_2(8.9) =$$
$$= 3 + 1/6\,(8.9-9) - \frac{1}{216}(8.9-9)^2 =$$
$$= 3 + \frac{1}{6}(-0.1) - \frac{1}{216}\cdot 0.01 = 3 - \underset{2\cdot3\cdot10}{\frac{1}{60}} - \underset{2^3\cdot3^3\cdot10^2}{\frac{1}{21600}}$$
$$= \frac{3\cdot 21600 - 360 - 1}{21600} = \frac{64800 - 361}{21600}$$
$$= \frac{64439}{21600} \approx \underline{\underline{2.983}}$$

SVAR:

$P_2(x) =$
$3 + 1/6(x-9) - \frac{1}{216}(x-9)^2$

$\sqrt{8.9} \approx \frac{64439}{21600} \approx 2.983$

$$\begin{array}{r} 2.983 \\ 21600 \,\big)\, 64439 \\ 43200 \\ \hline 212390 \\ 194400 \\ \hline 0179900 \\ 172800 \\ \hline 71000 \\ 64800 \end{array}$$

KLART ATT 4:e decimal < 5

4. Vi gör Gausselimination på systemets totalmatris:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & -7 & 1 \\ 5 & -7 & 37 & 29 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -2 \quad -5 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 18 & 6 \\ 1 & 1 & -7 & 1 \\ 0 & -12 & 72 & 24 \end{array}\right) -1/3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -6 & -2 \\ 1 & 1 & -7 & 1 \\ 0 & -12 & 72 & 24 \end{array}\right) \begin{array}{c} -1 \quad 12 \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -6 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{cases} y - 6z = -2 \\ x - z = 3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 + 6t \\ z = t \end{cases}$$

<u>Svar:</u> $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>TOLKNING:</u> DE TRE GIVNA EKVATIONERNA REPRESENTERAR VARSITT PLAN I RYMDEN, LÖSNINGEN TILL EKV. SYSTEMET UTGÖRS AV PUNKTER GEMENSAMMA FÖR DE TRE PLANEN, SOM I DETTA FALL BLIR EN RÄT LINJE.

(5) $\bar{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

a) $\bar{v} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ // xy-planet $\Leftrightarrow$ $c=0$

$$\begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix} \perp \bar{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}(a+b) = 0 \Leftrightarrow a = -b$$

Välj först t.ex. $a=1$, som ger vektor

$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ parallell med xy-planet och $\perp \bar{u}$.

$\bar{v} = \frac{1}{|\bar{v}_1|}\bar{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ är en enhetsvektor med samma egenskaper.

b) Sätt $\bar{w} = \bar{u}\times\bar{v}$.

Då blir $\bar{w}\perp\bar{u}$, $\bar{w}\perp\bar{v}$ och dessutom är $\bar{w}$ enhetsvektor ty

$$|\bar{w}| = |\bar{u}||\bar{v}|\sin\alpha = \left\{\begin{matrix}\alpha = \pi/2\\ \text{ty } \bar{u}\perp\bar{v}\end{matrix}\right\} = |\bar{u}||\bar{v}| = 1$$

$$\bar{w} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1&-1\\1&0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

<u>Svar:</u> a) t.ex $\bar{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

b) t.ex $\bar{w} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$

(6.) $f(x) = \ln(1-x^2) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}(-2x) = \dfrac{-2x}{1-x^2}$

$$\Rightarrow 1 + (f'(x))^2 = 1 + \left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)^2 = 1 + \frac{4x^2}{(1-x^2)^2} =$$

$$= \frac{(1-x^2)^2 + 4x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{1 + x^4 - 2x^2 + 4x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{1+x^4+2x^2}{(1-x^2)^2} =$$

$$= \frac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^2} = \left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^2$$

Alltså ges sökt integral av

$$\int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = \int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} \left|\frac{1+x^2}{1-x^2}\right| dx = \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{1+x^2}{1-x^2} > 0 \\ \text{om } |x| \le 1/2 \end{array} \right\}$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1+x^2}{1-x^2}\, dx = \left\{ \begin{array}{r} -1 \\ 1-x^2 \,\big)\, 1+x^2 \\ -(1+x^2) \\ \hline 2 \end{array} \right\} =$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} -1 + \underbrace{\frac{2}{1-x^2}}_{\frac{1}{(1-x)(1+x)}}\, dx = \int_{-1/2}^{1/2} (-1)\, dx + \int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) dx$$

$$= -1 + \Big[\ln(1+x) - \ln(1-x)\Big]_{-1/2}^{1/2} = -1 + \left[\ln \frac{1+x}{1-x}\right]_{-1/2}^{1/2}$$

$$= -1 + \ln \frac{3/2}{1/2} - \ln \frac{1/2}{3/2} = 2(\ln 3) - 1$$

6
forts. SVAR: $2\ln(3) - 1$

En (naturlig) tolkning av

$$\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$ är detta är

"LÄNGDEN AV GRAFEN $y=f(x)$, $a<x<b$".

alltså i detta fall längden av

kurvan

$$y=\ln(1-x^2), \quad -1/2 < x < 1/2.$$

(7) Om $p \leq 0$ är

$\frac{1}{n(\ln n)^p} \geq \frac{1}{n}$, och eftersom $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ är divergent är även $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ divergent för $p \leq 0$.

Antag nu att $p > 0$. Då är $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^p}$ en positiv funktion (för $x > 1$) som avtar mot 0 då $x \to +\infty$.

Enligt Cauchys Integralkriterium är $\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ konvergent omm $\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p} dx$ är konvergent.

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p} dx = \lim_{A \to +\infty} \int_2^A \frac{1}{x(\ln x)^p} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x} dx \end{array} \right\}$$

$$= \lim_{A \to +\infty} \int_{\ln 2}^{\ln A} \frac{1}{u^p} du = \lim_{B \to \infty} \int_{\ln 2}^{B} \frac{1}{u^p} du = \begin{cases} < \infty & p > 1 \\ +\infty & p \leq 1 \end{cases}$$

Svar: Serien är konvergent omm $p > 1$

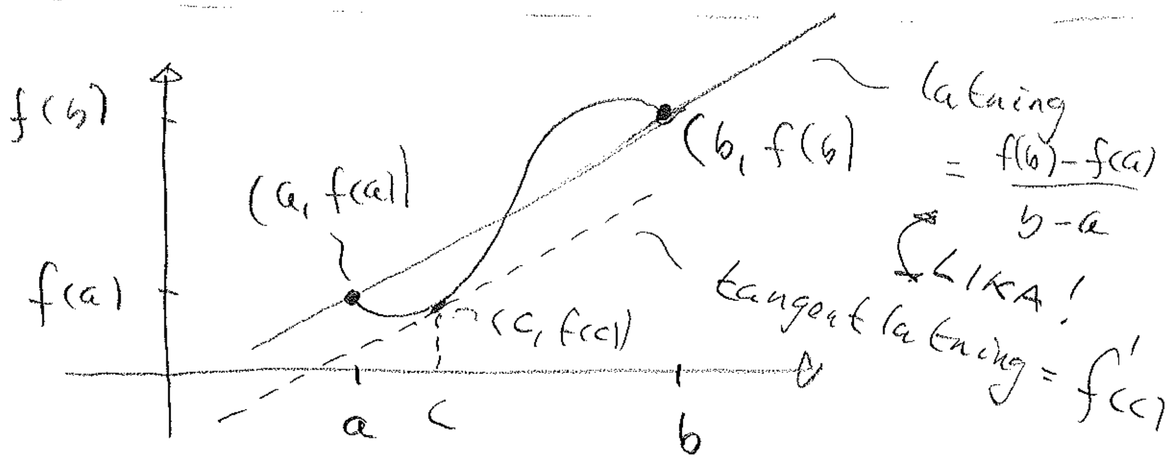
MEDELVÄRDESSATSEN:

8. Antag att $f(x)$ är kontinuerlig

a) på $[a,b]$ och deriverbar på (a,b).

Då finns en punkt c, $a<c<b$ sådan att

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$



(Det finns minst en punkt c i (a,b) där "tangentlutning" = "medellutning" på (a,b))

b) Låt $f(x) = \ln x$

$$\ln\frac{b}{a} = \ln b - \ln a = f(b) - f(a)$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{ENLIGT}\\ \text{MEDELV. SATS}\end{matrix}\right\} = f'(c)(b-a), \quad 1<a<c<b$$

$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$. För $c>1$ är $f'(c)<1$

dvs $\ln\frac{b}{a} = \frac{1}{c}(b-a) < b-a$.

Svar: JA, enl. ovan.